NIVEAU

# BLIND KWARTETTEN

**Bij allerlei spellen kun je naast de gewone variant ook de zogeheten 'blinde' variant spelen: in plaats van met een speelbord of kaarten speel je het spel volledig in gedachten. Blind schaken en blind dammen zijn het meest bekend, maar in dit artikel onderzoeken we hoe je kunt blind kwartetten. Blind kwartetten kun je spelen zonder kaarten. Tijdens het spelen bepaal je als speler niet alleen wie welke kaart heeft, maar ook welke kaarten in het spel zitten. Je doet dit door tactisch vragen te stellen en antwoorden te geven.**
**Dit artikel is gebaseerd op een werkboekje van een zomerkamp van stichting Vierkant voor Wiskunde.**

door **Jos Brakenhoff** en **Arjen Stolk,** bewerkt door **Jeanine Daems**

## KWARTETTEN

Een potje kwartet wordt gespeeld door drie of meer spelers en een set kaarten met kwartetten. Een kwartet wordt gevormd door vier kaarten die elk verschillend zijn maar wel bij elkaar horen, zoals bijvoorbeeld een kwartet Vierhoeken dat bestaat uit de kaarten vierkant, rechthoek, parallellogram en vlieger of een kwartet Griekse wiskundigen met Pythagoras, Archimedes, Apollonius en Euclides.

Regels:

1. Schud de kaarten en verdeel ze zo gelijk mogelijk over de spelers. Een willekeurige speler begint. Bij gewoon kwartetten worden meestal niet alle kaarten opgedeeld en mag er af en toe een kaart van de stapel gepakt worden. Maar omdat dat blind kwartetten veel lastiger maakt, delen we liever alle kaarten op.
2. Een speler die aan de beurt is, de *vrager*, vraagt één van de kaarten van het kwartetspel aan een andere speler, de *gevraagde*. Deze vraag moet aan de volgende voorwaarden voldoen:
   a) De vrager heeft de gevraagde kaart niet zelf in zijn hand.
   b) De vrager heeft tenminste één kaart van het kwartet van de gevraagde kaart wél in zijn hand.
3. Dan zijn er twee mogelijkheden:
   a) De gevraagde speler heeft de gevraagde kaart. Hij geeft de gevraagde kaart aan de vrager en de vrager blijft aan de beurt.
   b) De gevraagde speler heeft de gevraagde kaart niet. De beurt van de vrager eindigt en de gevraagde speler wordt de nieuwe vrager.
4. Als een speler een kwartet compleet heeft, legt hij dat kwartet af.
5. Het spel eindigt als elk kwartet is afgelegd. De speler met de meeste kwartetten wint.

## BLIND KWARTETTEN: DE REGELS

De regels voor blind kwartetten zijn hetzelfde als die voor gewoon kwartetten, met één uitzondering: alle kaarten zijn blanco of zelfs helemaal denkbeeldig. Gedurende het spel wordt langzaam duidelijk welke kaarten er in het spel zitten en wie welke kaarten heeft. Je kunt het spel met verschillende aantallen kwartetten spelen.

Bij blind kwartetten ligt dus niet van tevoren vast wat er op de kaarten staat. Dat verzin je tijdens het spelen. Alleen: je moet er wel voor zorgen dat het spel blijft kloppen! Het kan niet dat er opeens een kwartet van vijf kaarten is, of dat er een kaart in het spel zou moeten zitten die niemand meer kan hebben. Dat is soms nog best lastig. Je moet je dus altijd blijven afvragen: klopt het nog wel wat er allemaal gezegd is, welke vragen kan ik eigenlijk nog stellen, en welke antwoorden mag ik geven?

Het is natuurlijk een beetje flauw om na het uitdelen meteen te roepen dat je een kwartet gekregen hebt als er niets op je kaarten staat. Daarom veranderen we regel 4 een beetje: regel 4′ luidt "Een speler mag een kwartet afleggen als hij kan bewijzen dat hij het complete kwartet in zijn handen heeft".

De meeste potjes blind kwartetten verlopen niet erg soepel. Het is lastig om bij te houden wie wat heeft en wie dus wat mag vragen. Om een idee te krijgen kun je eerst eens proberen een potje te spelen voor je verder leest.
Welke conclusies kun je trekken?

### OPGAVE 1

Jan vraagt Jet om de Kop van Jut uit het kwartet Ouderwetse Kermisattracties.

a. Wat weten we nu over de kaarten van Jan?
b. Jet antwoordt "nee". Wat weten we nu over de kaarten van Jet?
c. Wat weten we over de verdeling van de kaarten als Jet "ja" antwoordt?

Bovendien moeten we in de gaten houden hoeveel kaarten elke speler heeft, zoals blijkt uit de volgende opgave.

### OPGAVE 2

Bekijk het volgende spel, dat vier spelers A, B, C en D en drie kwartetten X, Y en Z heeft.

Beurt 1: A vraagt aan B om kaart 1 uit kwartet X. B heeft die kaart niet.
Beurt 2: B vraagt aan C om kaart 1 uit kwartet Y. C heeft die kaart niet.
Beurt 3: C vraagt aan A om kaart 1 uit kwartet Y. A heeft die kaart wel.
Beurt 4: C vraagt aan A om kaart 2 uit kwartet Y. A heeft die kaart niet.
Beurt 5: A vraagt aan D om kaart 1 uit kwartet Z. D heeft die kaart niet.
Beurt 6: D vraagt aan B om kaart 2 uit kwartet Z. B heeft die kaart wel.
Beurt 7: D vraagt aan A om kaart 2 uit kwartet X. A heeft die kaart niet.
Beurt 8: A vraagt aan C om kaart 3 uit kwartet Y. C heeft die kaart wel.

We gaan dit spel proberen te analyseren. Omdat nog niet uitgelegd is hoe we dat moeten doen, vragen we je eerst om eens wat te proberen. Het is niet erg als dat niet meteen lukt.

a. Maak een overzicht waarbij voor elke speler is aangegeven wat we weten over zijn kaarten.
b. Geef een verdeling van de kaarten die klopt voor het spelen van deze beurten.
c. Is aan de spelregels voldaan met betrekking tot het aantal kaarten dat iedere speler in het begin heeft gekregen?

Een blind-kwartetspel is *geldig* als er een correcte beginverdeling van de kaarten is die klopt voor het spelen van die beurten. Bij deze beginverdeling leggen we vast hoeveel kaarten elke speler in het begin heeft. Over het algemeen zal elke speler met hetzelfde aantal kaarten beginnen. Soms kan dat echter niet, bijvoorbeeld als je drie spelers hebt en vier kwartetten. De vorige opgave beschrijft een ongeldig spel, omdat speler A in de beginsituatie vier van de twaalf kaarten zou hebben gekregen.

## KOPPELEN

Stel dat je blind kwartetten zou spelen met blanco kaarten: voor elke kaart die een speler heeft, krijgt hij een leeg blaadje papier. Op een lege kaart mag de speler gedurende het spel twee dingen opschrijven: het kwartet waartoe de kaart behoort en de specifieke kaart die het is.

>>

Met deze notatie kunnen we een kwartetspel interpreteren als een zogeheten koppelprobleem. We moeten dan de papiertjes die de kaarten voorstellen één-op-één koppelen aan de kwartetkaarten die ze voor kunnen stellen. Als het koppelprobleem oplosbaar is, dan is de spelsituatie een geldige situatie.

## OPGAVE 3

Jos' kaarten zien er op een bepaald moment zo uit:

- Eén kaart met 'Tumtums' van kwartet 'Snoepgoed',
- Eén kaart van kwartet 'Sprookjes',
- Eén kaart van kwartet 'Snoepgoed',
- Eén lege kaart.

Verder weten we op basis van zijn vragen en antwoorden dat hij de volgende kaarten *niet* heeft:

- 'Peperkoek' van 'Snoepgoed',
- 'De wolf en de zeven geitjes' van 'Sprookjes',
- 'Hans Christiaan Andersen' van 'Schrijvers'.

Bepaal van elke kaart waar hij nog aan gekoppeld kan zijn. Verzin zelf eerst welke andere, nog niet genoemde kaarten er in het spel zitten. Er zijn drie kwartetten in dit spel.

In het algemeen geldt dus: als het koppelprobleem oplosbaar is, dan is de situatie nog geldig. Als het dat niet is, dan is er ergens een foutje gemaakt. Hoe kun je zien of een koppelprobleem geldig is? Daarvoor komt een wiskundige stelling goed van pas: *de Huwelijksstelling van Hall*. Zo'n koppelprobleem krijg je bijvoorbeeld als je mannen aan vrouwen wilt koppelen, sollicitanten aan banen, enzovoorts. Een koppelprobleem is niet symmetrisch, bij een sollicitatie blijken bijvoorbeeld niet alle personen geschikt te zijn voor alle functies. Dat kun je uitdrukken in een tabel (zie tabel 1).

## OPGAVE 4

Is er in deze situatie een koppeling mogelijk waarbij elke functie ingevuld wordt?

De vraag is nu: wanneer is zo'n koppelprobleem oplosbaar? Als er een functie is waar niemand geschikt voor is, is het uiteraard niet oplosbaar. Maar ook als er drie functies zijn waar in totaal slechts twee mensen geschikt voor zijn is er natuurlijk geen oplossing mogelijk.
De huwelijksstelling van Hall zegt dat dergelijke situaties, waarin een groepje van $n$ functies door in totaal maximaal $n$ - 1 sollicitanten gedaan zou kunnen worden, de enige situaties zijn waarin er geen oplossing is.

Algemeen geformuleerd zegt de *Huwelijksstelling van Hall***:** een noodzakelijke en

| FUNCTIE | GESCHIKTE SOLLICITANTEN |
|---|---|
| A | 1 |
| B | 2, 6 |
| C | 1, 3, 5 |
| D | 4, 6 |
| E | 2, 4, 5 |
| F | 3 |

Tabel 1

voldoende voorwaarde voor het bestaan van een oplossing van het huwelijksprobleem (of koppelingsprobleem) is, dat iedere $k$ functies samen ten minste $k$ verschillende geschikte sollicitanten hebben.

Als je meer over deze stelling wil weten, kun je het artikel van Dion Gijswijt hierover lezen in Pythagoras 48-3 (januari 2009).

In de situatie van een blind kwartetspel moeten we dus van alle papiertjes in het spel bepalen aan welke kwartetten die nog gekoppeld kunnen zijn, dus in feite zo'n tabelletje als tabel 1 opstellen, en dan kijken of er deelverzamelingen bestaan van $k$ papiertjes die samen aan minder dan $k$ opties gekoppeld mogen worden. Als dat zo is, is het spel ongeldig. De moeilijkheid van blind kwartetten zit vooral in zodanig vragen stellen en antwoorden geven dat het spel geldig blijft.

## STRATEGIE

Nu hebben we wel gezien of een bepaalde situatie nog een geldig spel voorstelt, maar we weten nog steeds niet echt hoe je nu kunt winnen. Het is in het algemeen niet makkelijk een strategie voor dit spel te bepalen. Een klein voorbeeld kunnen we nog wel doorrekenen. We gaan ervan uit dat elke speler wil dat hijzelf wint en optimaal speelt.

### OPGAVE 5

Arjen, Michiel en Jos spelen een klein spel blind kwartetten. Er is maar één kwartet. Arjen heeft twee kaarten. Michiel en Jos elk één. Michiel mag beginnen. Bepaal de uitkomst van het spel. Beantwoord eerst eventueel onderstaande deelvragen.

a. Als Michiel een kaart van Arjen vraagt, wie wint er dan? Maakt het uit welke kaart hij vraagt?
b. Als Michiel een kaart, zeg $K_1$, aan Jos vraagt, wat is dan Jos zijn beste antwoord?
c. Stel Jos antwoordt dat hij de $K_1$ niet heeft. Welke kaart moet hij aan wie vragen om niet te verliezen?
d. Wat is de uitkomst bij optimaal spel van alle drie de spelers?

Maar we willen eigenlijk graag dat elk spelletje eindigt. Je kunt daarom als extra regel toevoegen: het is niet toegestaan een kaart te vragen aan een speler die hem zeker niet heeft.
Hoe kom je erachter of een speler een kaart zeker niet heeft? Nou, je kunt bijvoorbeeld aannemen dat hij hem wel heeft en dan kijken of het bijbehorende koppelprobleem oplosbaar is.

### OPGAVE 6

Stopt een blind kwartetspel altijd als we deze regel toevoegen?

### OPGAVE 7

Arjen, Michiel en Jos besluiten deze extra regel in te voeren. Ze herhalen het spel uit opgave 5. Hoe loopt het spel nu af?

De situatie waar je in de vorige opgave tegenaan bent gelopen heet een *kingmaker* situatie. Een speler kan zelf niet meer winnen, maar wel bepalen wie van de andere spelers wint.

Kingmakers komen niet voor bij spellen met twee teams. Arjen, Michiel en Jos besluiten om twee teams te vormen. Ze vragen Vivike om mee te spelen. Arjen en Michiel zijn team 1. Jos en Vivike vormen samen team 2. Zolang het kwartet eindigt bij een van de beide teamleden, winnen beide spelers van dat team. Het is toegestaan een kaart te vragen aan je teamgenoot.

### OPGAVE 8

Elk van de spelers heeft één kaart van het kwartet. Michiel begint weer. Welk team wint het spel? Het is nog steeds niet toegestaan een kaart te vragen aan iemand die hem zeker niet heeft.

>>
Kijk voor de antwoorden op de volgende pagina

## ANTWOORDEN

### ANTWOORD 1

a. Jan heeft een kaart van het kwartet Ouderwetse Kermisattracties, maar niet de Kop van Jut.
b. Jet heeft niet de Kop van Jut.
c. Jet heeft blijkbaar de Kop van Jut en de andere spelers dus niet. Daarna geeft Jet de Kop van Jut aan Jan en heeft hij hem dus.

### ANTWOORD 2

a. Er zijn verscheidene manieren om een overzicht te maken. Dit is er één:
- **A**: $X_{3,4}$, $Y_1$ (tot beurt 3), $Y_3$ (vanaf beurt 8), $Y_4$, $Z_{3,4}$. Niet $X_1$, $X_2$, $Y_2$, $Z_1$.
- **B**: $Y_2$, $Z_2$ (tot beurt 6). Niet: $X_1$.
- **C**: $Y_1$ (vanaf beurt 3), $Y_3$ (tot beurt 8).
- **D**: $X_{1,3,4}$, $Z_2$ (vanaf beurt 6), $Z_{3,4}$. Niet: $X_2$, $Z_1$.

Hierbij staat bijvoorbeeld $X_{2,3,4}$ voor een kaart die uit kwartet X komt en kaart 2, 3 of 4 kan zijn. Verder is bij dit overzicht alle informatie die we kunnen afleiden verwerkt en dubbele informatie is niet genoteerd. Bijvoorbeeld, omdat na beurt 3 vastligt waar $Y_1$ zich bevindt, is niet opgeschreven dat B hem niet heeft, hoewel we dat al zouden kunnen noteren aan de hand van beurt 2.

b. Bijvoorbeeld
- **A**: $X_3$, $X_4$, $Y_1$, $Y_4$, $Z_3$
- **B**: $X_2$, $Y_2$, $Z_1$, $Z_2$
- **C**: $Y_3$
- **D**: $X_1$, $Z_4$

c. Nee, want speler A moet met minstens vier kaarten zijn begonnen: $X_{3,4}$, $Y_1$, $Y_4$ en $Z_{3,4}$. Bij 12 kaarten over 4 spelers verdeeld, is dat een ongeldig aantal.

### ANTWOORD 3

De kaarten in de genoemde volgorde kunnen nog zijn:
- Alleen 'Tumtums' van 'Snoepgoed'.
- 'Hans en Grietje', 'Roodkapje' of 'Sneeuwwitje', alle van 'Sprookjes'.
- 'Drop', 'Pepermunt' of 'Tumtums'. (Je kan ook zeggen dat het niet 'Tumtums' is, omdat de eerste kaart dat al is. Technisch gezien ben je dan al begonnen met het oplossen van het koppelprobleem.)
- 'Hans en Grietje', 'Roodkapje', 'Sneeuwwitje' van 'Sprookjes'; 'Drop', 'Pepermunt', 'Tumtums' van 'Snoepgoed'; 'De gebroeders Grimm', 'Charles Perrault' of 'Annie M.G. Schmidt' van 'Schrijvers'.

### ANTWOORD 4

Er zijn twee koppelingen mogelijk:
- A-1, B-2, C-5, D-6, E-4 en F-3.
- A-1, B-6, C-5, D-4, E-2 en F-3.

### ANTWOORD 5

a. Arjen kan winnen. Als Arjen zegt dat hij de kaart niet heeft, dan kan Arjen daarna de gevraagde kaart aan Jos vragen. Jos moet die kaart hebben, want Michiel heeft hem niet. Daarna vraagt Arjen aan Michiel de enige kaart die Michiel nog kan hebben. Het maakt hierbij niet uit welke kaart als eerste gevraagd wordt. Kwartetten is symmetrisch in de kaarten.
b. Als Jos antwoordt dat hij de kaart heeft, dan wint Michiel. Dus Jos moet antwoorden dat hij de kaart niet heeft.
c. Als Jos $K_2$ vraagt aan Michiel, dan zal Michiel "Nee" antwoorden. Arjen heeft dan $K_1$ en $K_2$. Michiel kan dan het kwartet winnen. Als Jos $K_2$ vraagt aan Arjen, dan zal Arjen "Nee" antwoorden. Michiel heeft dan $K_2$. Arjen kan het kwartet winnen. Als Jos $K_1$ vraagt aan Arjen, dan zal Arjen "Ja" moeten antwoorden, want Michiel heeft niet $K_1$. Jos blijft aan de beurt en moet nu $K_2$ aan iemand vragen. We hebben al gezien dat de speler aan wie die vraag gesteld wordt, wint. Dus Jos moet $K_1$ aan Michiel vragen.
d. Het wordt remise. Michiel en Jos blijven elkaar steeds dezelfde kaart vragen. Zodra ze een kaart aan Arjen vragen, verliezen ze het spel.

### ANTWOORD 6

Bij iedere beurtwissel moet er minstens één koppel in het koppelprobleem niet meer toegestaan zijn, waarvan we dat eerst nog niet wisten. Er zijn maar eindig veel mogelijke koppels, dus eindig veel beurtwissels. Een speler kan ook maar eindig veel vragen stellen als hij wel aan de beurt blijft, want er zijn maar eindig veel kaarten.

### ANTWOORD 7

Als Michiel een kaart aan Arjen vraagt, dan wint Arjen nog steeds. Dus Michiel vraagt een kaart aan Jos. Jos kan nu bepalen wie er wint, hetzij Arjen, hetzij Michiel. Jos kan zelf niet meer winnen.

### ANTWOORD 8

Michiel en Arjen kunnen winnen. Michiel vraagt aan Arjen $K_1$. Arjen heeft die niet. Arjen vraagt $K_1$ aan Jos.
- Als Jos $K_1$ heeft, dan vraagt Arjen $K_2$ aan Michiel, die hem heeft en dan moet Vivike de laatste kaart hebben die Arjen niet heeft.
- Als Jos $K_1$ niet heeft, dan heeft Vivike $K_1$. Jos kan die kaart van haar vragen (of niet) maar moet dan $K_2$ aan Arjen of Michiel vragen. Aan wie Jos $K_2$ ook vraagt, diegene zal antwoorden dat hij die kaart niet heeft. Dus de ander heeft $K_2$. Degene die dan aan de beurt is (Arjen of Michiel), wint het kwartet.