

Deze jaargang staan op de achterkant van *Pythagoras* zes prenten uit een bijzondere uitgave van *De Elementen* van Euclides: een oud Grieks werk in een negentiende-eeuws jasje. Oliver Byrne voorzag de beroemde stellingen uit het oorspronkelijke werk van kleurige afbeeldingen, die ook voor het begrip zeker voordelen hebben. In dit artikel bekijken we de opbouw van Euclides' werk en we leggen de gewone vertaling van Euclides naast de kleurige bewerking van Byrne uit 1847.

■ door Jeanine Daems

EUCLIDES' ELEMENTEN

Euclides leefde rond 300 voor Christus en gaf les in Alexandrië, in het huidige Egypte. Verder weten we eigenlijk niets over hem, behalve natuurlijk het feit waardoor hij nog steeds beroemd is: hij schreef *De Elementen*, een uitgebreid werk in dertien boeken waarin de bekende wiskunde van zijn tijd samengebracht werd. *De Elementen* gaat over vlakke meetkunde, verhoudingen, getallen en ruimtemeetkunde. In dit artikel gaan we vooral in op de vlakke meetkunde, omdat dat het deel is dat Oliver Byrne bewerkt heeft.

Het samenbrengen van alle bekende wiskunde was echter niet het belangrijkste. Euclides' werk is eigenlijk het eerste waarin de wiskunde wordt opgebouwd door middel van stellingen met bewijzen. In de hedendaagse wiskunde hebben bewijzen een belangrijke rol: met een bewijs toon je aan dat een wiskundige bewering onomstotelijk vaststaat. Er is niets meer tegenin te brengen. Een wiskundige is niet tevreden met een vermoeden of een regel-tje: pas als je het bewijs gevonden of begrepen hebt, weet je het zeker.

Maar je kunt niet vanuit het niets beginnen met bewijzen, je moet ergens van uit gaan. En je moet het met elkaar eens zijn over hoe de logica werkt: wanneer mag je uit een bewering iets anders concluderen?

DEFINITIES, POSTULATEN EN ALGEMEENHEDEN Euclides begint zijn werk daarom met een aantal verschillende soorten uitgangspunten: definitie, postulaten en algemeenheden. De *definitie* vertellen wat de begrippen waar de wiskunde over gaat precies betekenen. Hieronder staan enkele voorbeel-

den van definitie uit boek I; achter op dit nummer vind je nog een aantal definitie uit boek III.

1. Een punt is wat geen deel heeft.
2. Een lijn is breedteloze lengte.
15. Een cirkel is een vlakke figuur omvat door een lijn zodat alle rechte lijnen die erop vallen vanuit een punt binnen de figuur aan elkaar gelijk zijn.
16. En dat punt heet het middelpunt van de cirkel.
17. Een diameter van de cirkel is een rechte lijn getekend door het middelpunt die aan beide kanten beëindigd wordt door de omtrek van de cirkel, en zo'n rechte lijn deelt de cirkel in twee gelijke delen.
23. Parallele rechte lijnen zijn rechte lijnen die, in hetzelfde vlak liggend en willekeurig ver doortrokken in beide richtingen, elkaar in beide richtingen niet ontmoeten.

Postulaten stellen eigenschappen vast van de objecten in kwestie. De vijf postulaten over de vlakke meetkunde zijn:

- I. Twee punten kunnen verbonden worden door een rechte lijn.
- II. Een lijnstuk kan oneindig ver doortrokken worden tot een rechte lijn.
- III. Om elk middelpunt en met elke afstand als straal kan een cirkel getekend worden.
- IV. Alle rechte hoeken zijn gelijk.
- V. Als een rechte lijn over twee andere rechte lijnen loopt waarbij de hoeken die aan één kant gemaakt worden samen minder dan twee rechte hoeken zijn, dan snijden die twee rechte lijnen elkaar aan de kant waar de hoeken samen minder dan twee rechte hoeken zijn.

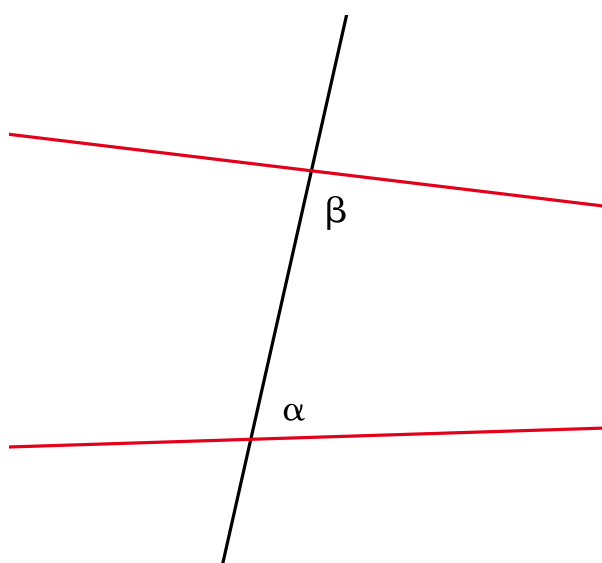
Postulaat IV klinkt voor ons een beetje gek. Maar hierbij moet je bedenken dat de oude Grieken hoeken nog niet maten in graden of een andere eenheid. Hoeken konden alleen vergeleken worden met andere hoeken. De rechte hoek werd op deze manier een standaardhoek waarmee andere hoeken vergeleken konden worden.

Postulaat V is wat lastiger te begrijpen dan de andere vier, maar figuur 1 werkt verhelderend. De vraag wat er zou gebeuren als het vijfde postulaat níét geldt, leidde in de negentiende eeuw tot de ontwikkeling van de *niet-euclidische meetkunde*. In het artikel 'Euclides van Alexandrië (325 vC - 265 vC): grondlegger van de axiomatic' (*Pythagoras* 48-5, april 2009) kun je daar meer over lezen.

De *algemeenheden* hebben een iets ander karakter: die gelden ook voor andere gebieden in de wiskunde, het zijn algemene uitgangspunten.

- A. Dingen die gelijk zijn aan hetzelfde, zijn ook gelijk aan elkaar.
- B. Als gelijke dingen bij gelijke dingen gevoegd worden, zijn de gehelen ook gelijk.
- C. Als gelijke dingen van gelijke dingen afgehaald worden, zijn de resten ook gelijk.
- D. Dingen die samenvallen, zijn gelijk aan elkaar.
- E. Het geheel is groter dan een deel.

12



Figuur 1 Het vijfde postulaat zegt: als $\alpha + \beta < 180^\circ$, dan snijden de twee rode lijnen elkaar aan de rechterkant van de zwarte lijn.

Vanuit die definities, postulaten en algemeenheden bouwt Euclides de wiskunde stap voor stap op. Want zodra je een stelling bewezen hebt, mag je die natuurlijk ook gebruiken in een volgend bewijs.

In figuur 2 zie je hoe de stellingen in boek I van elkaar afhangen. Er zijn 48 stellingen en die hangen af van elkaar, van de postulaten en algemeenheden. Je kunt in het schema bijvoorbeeld zien dat het bewijs van stelling 1 de postulaten I en III en algemeenheid A gebruikt. Stelling 48 hangt bijvoorbeeld alleen maar af van de stellingen 8 en 47. Stelling 47 en 48 zijn de stelling van Pythagoras en haar omkering.

DRIEHOEKCONSTRUCTIE De allereerste stelling uit het eerste boek stond op de achterkant van de vorige *Pythagoras* (zie ook figuur 3); daarin bewijst Euclides dat je op een gegeven lijnstuk een gelijkzijdige driehoek kunt construeren. Die constructie heb je in de brugklas al geleerd. Het bewijs gaat als volgt (zie figuur 4).

Zij AB het gegeven lijnstuk. We moeten dus een gelijkzijdige driehoek construeren op lijnstuk AB .

Teken de cirkel BCD met middelpunt A en afstand AB ; [postulaat III]

teken de cirkel ACE met middelpunt B en afstand BA ; [postulaat III]

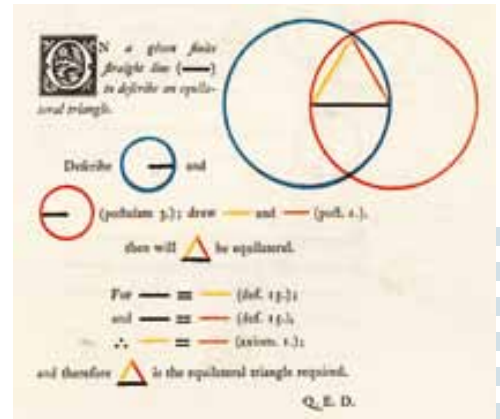
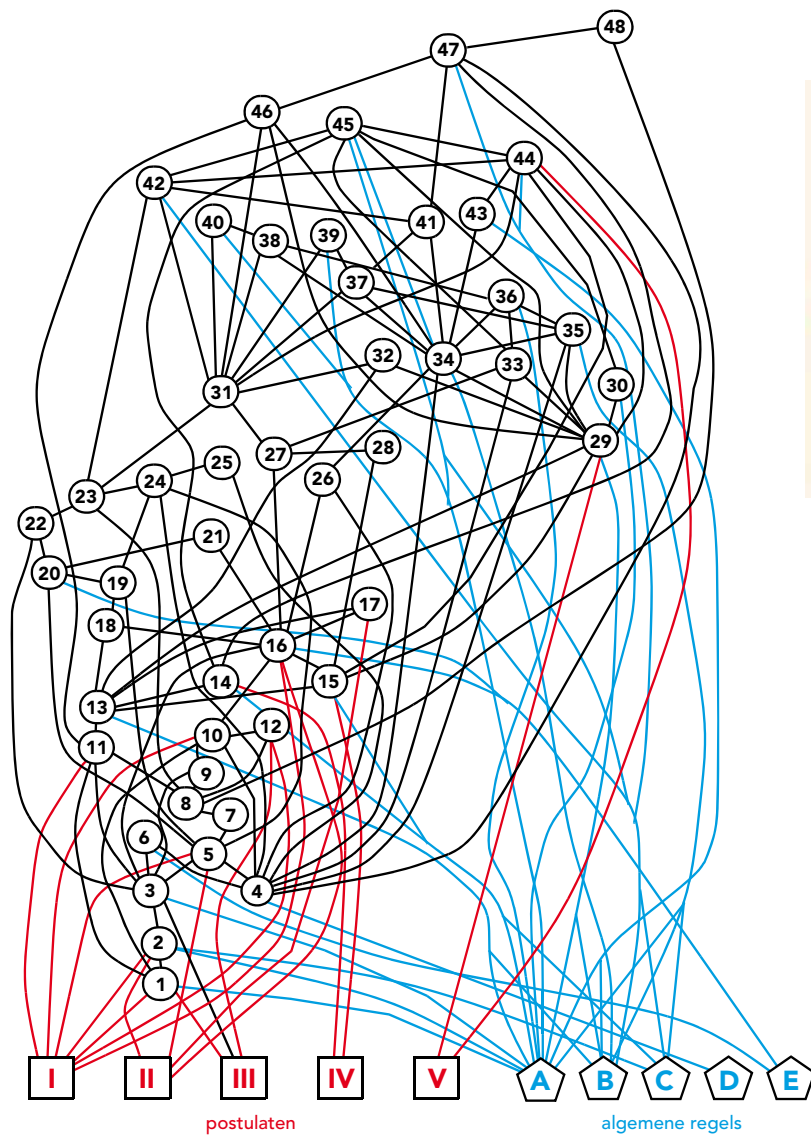
en teken vanuit het punt C , waar de cirkels elkaar snijden, verbindingen met de punten A en B , de lijnstukken CA en CB . [postulaat I]

Nu geldt, omdat het punt A het middelpunt is van cirkel CDB , dat AC gelijk is aan AB . [definitie 15] En ook, omdat het punt B het middelpunt van cirkel CAE is, dat BC gelijk is aan BA . [definitie 15] Maar CA was ook gelijk aan AB ; daarom zijn beide rechte lijnen CA en CB gelijk aan AB .

En dingen die gelijk zijn aan hetzelfde zijn ook gelijk aan elkaar [algemeenheid A]; dus CA is gelijk aan CB .

Dus de drie rechte lijnen CA , AB en BC zijn gelijk aan elkaar.

Dus de driehoek ABC is gelijkzijdig, en hij is geconstrueerd op het gegeven lijnstuk AB . Hetgeen vereist was.



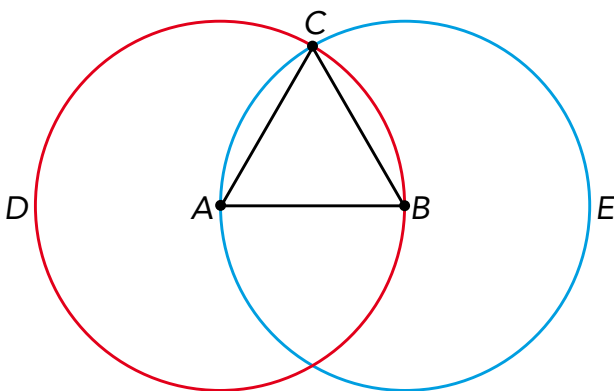
Links: **figuur 2** Dit schema laat zien hoe de stellingen in boek I van *De Elementen* van elkaar afhangen. Er zijn 48 stellingen en die hangen af van elkaar, van de postulaten (I-V) en algemeenheden (A-E).

Illustratie door Aad Goddijn, op grond van *The Elements* in de bewerking van Thomas Heath (Dover Science Books).

Boven: **figuur 3** Het bewijs van de eerste stelling uit boek I, in beeld gebracht door Oliver Byrne.

Je ziet dat de stapjes heel precies en klein zijn: ook dingen die je misschien wel direct duidelijk vindt, worden toch genoemd met een verwijzing naar de bijbehorende postulaten of algemeenheden.

Het argument is duidelijk hetzelfde als het argu-



Figuur 4 Hoe construeer je op een gegeven lijnstuk een gelijkzijdige driehoek?

ment zoals Byrne dat opschrijft, maar het verschil is ook goed te zien: Byrne hoeft nergens te verwijzen naar punten en lijnstukken door middel van letters. Hij doet dat met kleuren, en kan daarmee veel korter de link tussen de uitleg en het plaatje aangeven. Ook Byrnes symbolen zijn mooi: met een eenvoudig cirkeltje en een straal erin maakt hij duidelijk wat er mag volgens postulaat 3, en omdat de kleur en vorm van het symbooltje precies corresponderen met wat er in het volledige plaatje gebeurt, zie je heel direct welk stukje op dat moment getekend wordt.

En dat maakt het leren van de wiskunde volgens Byrne eenvoudiger, getuige de ondertitel van zijn prachtige werk: ‘The first six books of *The Elements* of Euclid – in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners’.

Het hele boek van Byrne is online te bekijken: <http://publicdomainreview.org/collections/the-first-six-books-of-the-elements-of-euclid-1847> (kort: <http://goo.gl/WX3mtf>). ■