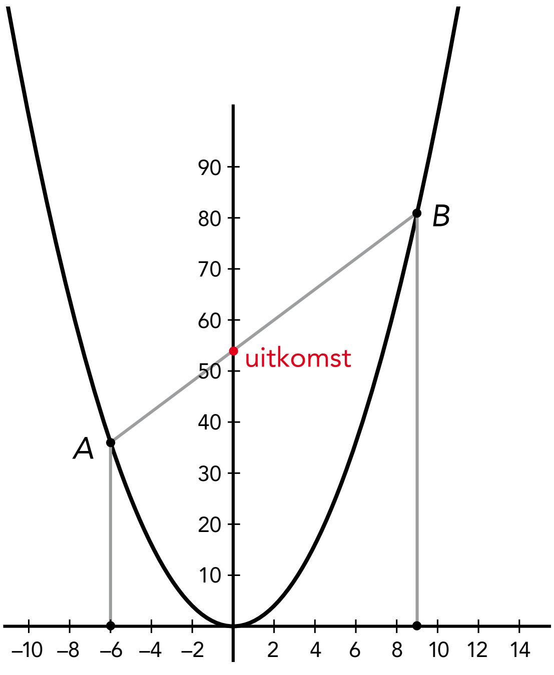
Getallen vermenigvuldigen is natuurlijk niet zo ingewikkeld, dat heb je op de basisschool al lang geleerd. Maar laatst was de Pythagorasredactie in het Mathematikum, een wiskundemuseum in Giessen (Duitsland), en daar zagen we een leuke grafische manier om het product van twee getallen af te lezen met behulp van een parabool! In dit stukje kun je lezen hoe dat werkt.

■ door Jeanine Daems

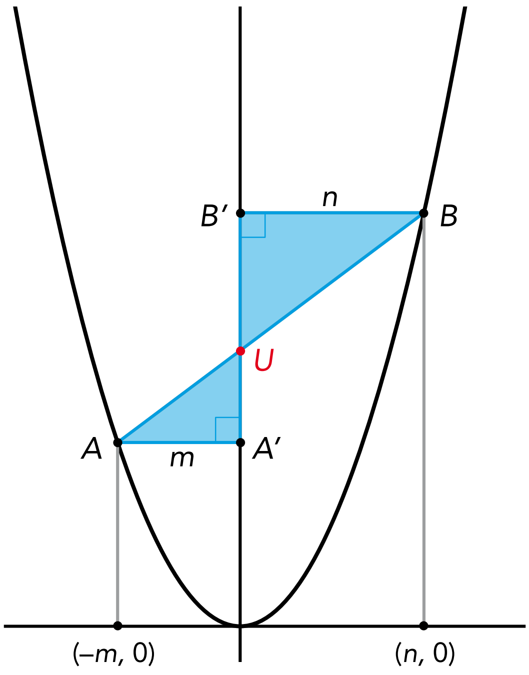
EEN PARABOOL ALS REKENMACHINE

Eerst kijken we hoe je met de paraboolmethode 6 en 9 met elkaar kunt vermenigvuldigen. Teken in een assenstelsel de parabool $y = x^2$ (zie figuur 1). We beginnen in de oorsprong, en zetten 6 stappen naar links, dan kom je in (–6, 0). Trek nu vanaf dat punt een verticale lijn tot je de parabool snijdt, dan kom je uit in (–6, 36), dat we punt *A* noemen. Doe hetzelfde bij (9, 0), dan kom je uit bij (9, 81), punt *B*. Trek nu een lijn van *A* naar *B*, en kijk waar de lijn de *y*-as snijdt. Jawel, in het punt (0, 54). En het is geen toeval dat 54 juist het product is van 6 en 9!

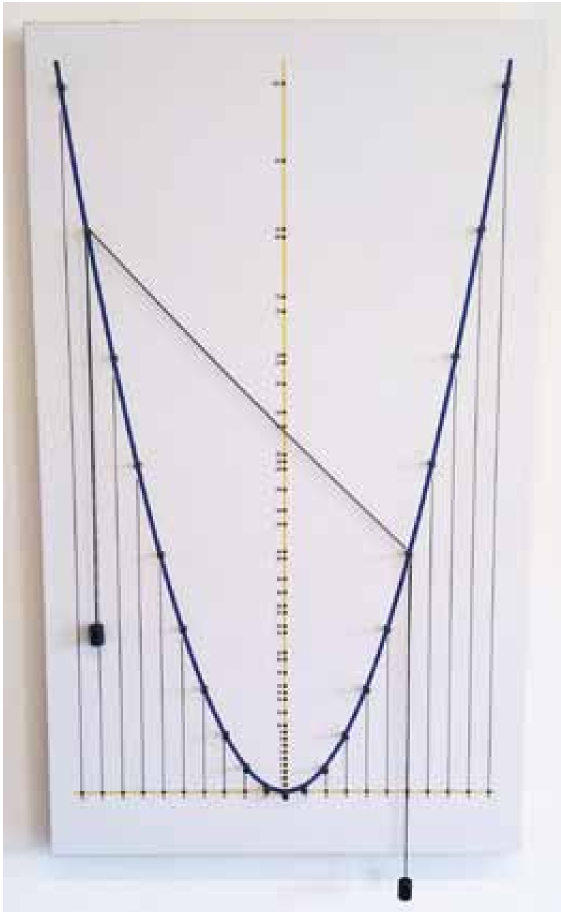
KWADRATEN We kunnen ook *bewijzen* dat deze vermenigvuldigingstruc altijd werkt. Het makkelijkst is dat voor het product van twee *identieke* getallen. Als je links en rechts hetzelfde getal *a* kiest,



Figuur 1 Met de paraboolmethode zien we dat 6 × 9 = 54.



Figuur 2 Hoe bewijs je dat de paraboolmethode altijd werkt voor positieve getallen *m* en *n*?



Figuur 3 In het Mathematikum is de parabool gemaakt met touwtjes en spijkers, zodat je een touwtje kan spannen over de punten A en B.

snijden de verticale lijnen de parabool op dezelfde hoogte, a^2. En een rechte lijn van $(-a, a^2)$ naar (a, a^2) is gewoon de lijn $y = a^2$, en die snijdt de y-as natuurlijk in $(0, a^2)$. Dus daarvoor klopt het.

ALGEMEEN We gaan nu bewijzen dat de paraboolmethode voor álle positieve getallen werkt. Stel dat we de getallen m en n willen vermenigvuldigen. We volgen dezelfde procedure als bij 6 en 9 (zie figuur 2). We moeten dus bewijzen dat het snijpunt van de lijn AB en de y-as precies het punt $(0, mn)$ is. In figuur 2 heet dat punt U, en de y-coördinaat van U noemen we voorlopig y_U. Onthoud dat het doel is om aan te tonen dat $y_U = mn$.

De punten A' en B' zijn de punten die je vindt als je vanuit A en B lijntjes loodrecht op de y-as tekent. Hun coördinaten zijn dus $(0, m^2)$ respectievelijk $(0, n^2)$. De twee blauwe driehoeken die je zo krijgt, lijken wel gelijkvormig te zijn. Dat is inderdaad het geval, ga maar na: ze hebben allebei een rechte hoek, en de twee hoeken bij het punt U zijn gelijk, want dat zijn overstaande hoeken. Als twee corresponderende hoeken gelijk zijn, is de derde het vanzelf ook, dus deze twee driehoeken zijn inderdaad gelijkvormig.

Hieruit volgt in het bijzonder dat

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{A'U}{B'U}.$$

Hoe lang zijn de lijnstukjes AA', BB', $A'U$ en $B'U$? Natuurlijk is $AA' = m$ en $BB' = n$. En $A'U$ is gelijk aan de y-coördinaat van U min de y-coördinaat van A', oftewel $y_U - m^2$. Ten slotte is $B'U$ gelijk aan de y-coördinaat van B min de y-coördinaat van U, oftewel $n^2 - y_U$.

Kortom: we hebben nu aangetoond dat

$$\frac{m}{n} = \frac{y_U - m^2}{n^2 - y_U}.$$

Kruiselings vermenigvuldigen laat zien dat

$$n(y_U - m^2) = m(n^2 - y_U).$$

Haakjes uitwerken levert

$$ny_U - m^2n = mn^2 - my_U,$$

en als we dan wat termen naar de andere kant halen, staat er

$$ny_U + my_U = mn^2 + m^2n.$$

Nu kunnen we aan allebei de kanten $n + m$ buiten haakjes halen:

$$(n + m)y_U = (n + m)mn.$$

Oftewel: $y_U = mn$. Dat is precies wat we wilden laten zien! ■