Kun je elk positief, geheel getal schrijven als een som van twee kwadraten? Het antwoord is nee: bij 3 en 7 bijvoorbeeld lukt dat niet. Maar bij 5 en 13 dan weer wel. In dit artikel gaan we onderzoeken wat de relatie is tussen roosters en getallen die wel als som van twee kwadraten te schrijven zijn.

■ door Hugo de Blank en Jeanine Daems

ROOSTERS EN SOMMEN VAN KWADRATEN

Het zal je niet veel moeite kosten om de getallen 5 en 13 te schrijven als een som van twee kwadraten: $1^2 + 2^2$ en $2^2 + 3^2$. Er bestaat een verband tussen roosters en getallen die als som van twee kwadraten te schrijven zijn. Dat had je misschien niet verwacht, maar je bent sommen van kwadraten al heel vaak tegengekomen bij de stelling van Pythagoras. En in roosters kom je al snel rechthoekige driehoeken tegen.

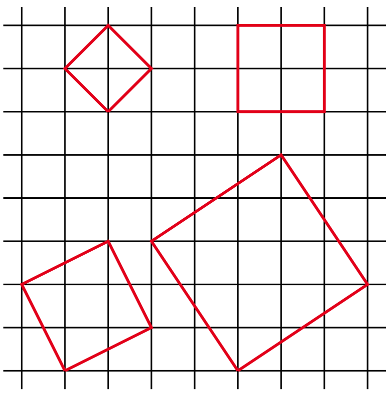
Opgave 1. In figuur 1 zie je een rooster van vierkanten met afmetingen van 1×1. Geef voor elk van de rode vierkanten de lengte van een zijde en de oppervlakte.

Opgave 2. Kun je ook een vierkant met oppervlakte 10 tekenen in zo'n rooster? En met oppervlakte 17? En met oppervlakte 23? Zo ja: hoe doe je dat? Zo nee: waarom niet?

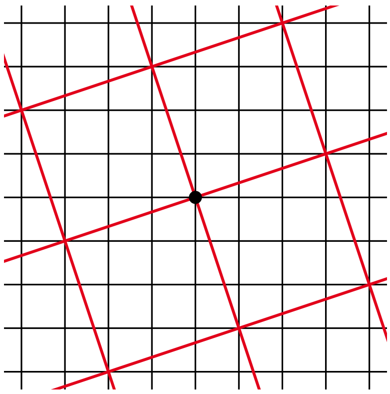
ROOSTERS OP ROOSTERS We gaan nu zo'n eenvoudig vierkantrooster gebruiken om daarop weer een grover vierkantrooster te maken. Dat kun je op verschillende manieren doen. Je kunt bijvoorbeeld simpelweg een rooster van vierkantjes van 2×2 op het rooster met vierkantjes van 1×1 tekenen, dan krijg je een rooster van vierkanten met oppervlakte 4.

Kunnen we ook een rooster tekenen met vierkanten van oppervlakte 10? Ja, dat kan als je je oplossing van opgave 2 gebruikt. Dat komt doordat 10 te schrijven is als een som van twee kwadraten: $1^2 + 3^2 = 10$, dus een driehoekje met rechthoekszijden 1 en 3 in het rooster levert een schuine zijde van lengte $\sqrt{10}$. Je ziet dat je een rooster van vierkanten met oppervlakte n kunt tekenen als het getal n een som van twee kwadraten is.

Het rooster in figuur 2 kun je maken door vanaf



Figuur 1



Figuur 2

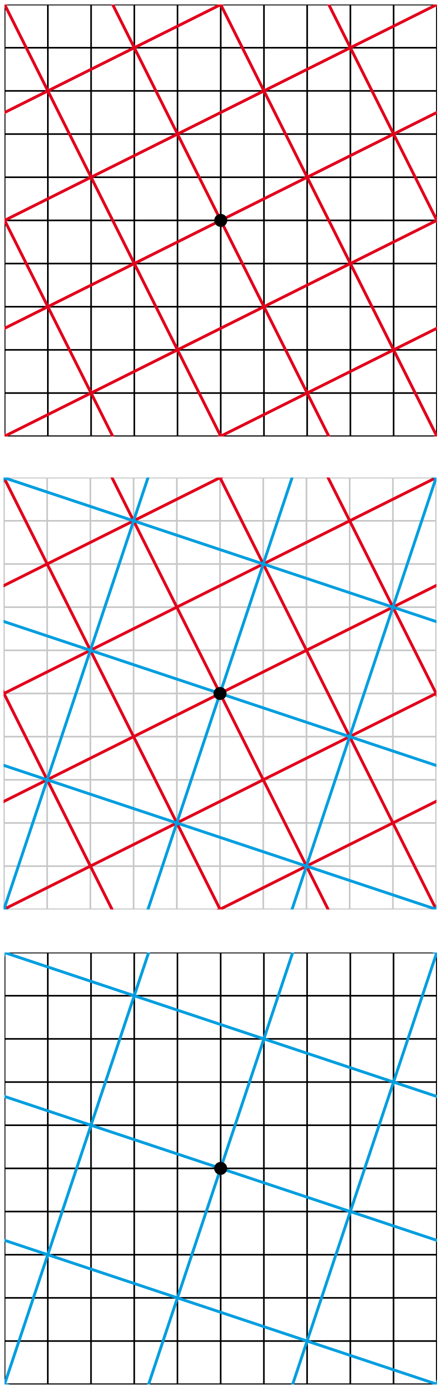
een beginpunt (de stip) een vierkantszijde te tekenen met het recept '3 hokjes naar rechts en 1 hokje omhoog'. Daarom noemen we dit rooster een *(3, 1)-rooster*.

Opgave 3. Teken op een ruitjesblaadje in vier verschillende plaatjes de volgende roosters: een (1, 1)-rooster, een (2, 0)-rooster, een (1, 2)-rooster en een (4, 1)-rooster.

Opgave 4. Bij de volgende paren roosters is steeds de vraag: is er verschil tussen deze twee roosters? Zo ja, wat?
- een (1, 1)-rooster en een (1, -1)-rooster;
- een (2, 1)-rooster en een (2, -1)-rooster;
- een (2, 1)-rooster en een (1, 2)-rooster;
- een (2, 1)-rooster en een (1, -2)-rooster.

Nu gaan we nog een stapje verder. Als je op een beginrooster een grover rooster kunt tekenen, kun je op dat grovere rooster weer een nóg grover rooster tekenen. Figuur 3 toont een voorbeeld. We beginnen met een (1, 0)-rooster (het gewone rooster van vierkantjes met oppervlakte 1) en tekenen daarop een (2, 1)-rooster (rood). Vervolgens doen we alsof alleen het rode rooster bestaat (in het middelste plaatje is het (1, 0)-rooster nog licht zichtbaar) en tekenen we daarop een (1, 1)-rooster (blauw). Als je het (2, 1)-rooster nu negeert, zie je dat het resultaat een (1, 3)-rooster op het oorspronkelijke rooster is (het onderste plaatje).

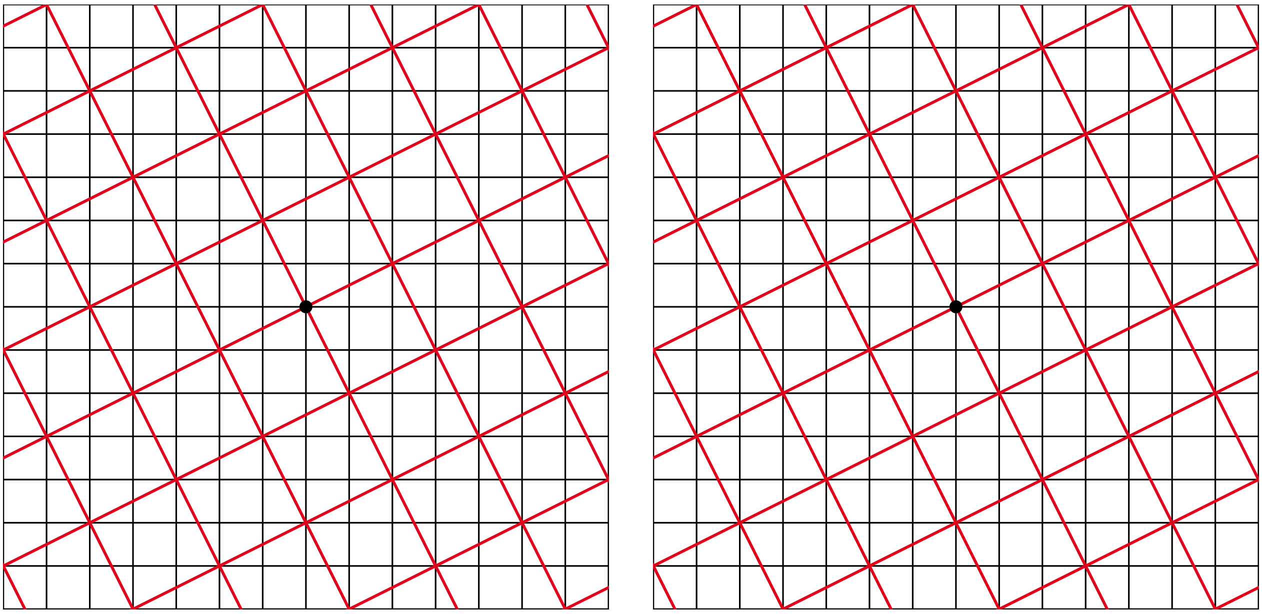
Opgave 5. Nu andersom: teken op ruitjespapier eerst een (1, 1)-rooster en daarop in een andere kleur een (2, 1)-rooster. (Begin weer netjes bij de stip in het midden.) Krijg je nu hetzelfde rooster als in het voorbeeld?



Figuur 3

Laten we eens kijken of we kunnen voorspellen wat de oppervlakte van de vierkanten in het grofste rooster wordt als je een rooster op een rooster tekent. In het voorbeeld begonnen we met vierkantjes van oppervlakte 1. In het (2, 1)-rooster hebben de vierkanten oppervlakte $2^2 + 1^2 = 5$. In een normaal (1, 1)-rooster hebben de vierkanten oppervlakte 2. En het uiteindelijke resultaat was een (1, 3)-rooster op het oorspronkelijke rooster, met vierkanten van oppervlakte 10.

Dit suggereert dat bij het tekenen van een rooster op een rooster de oppervlaktes van de vierkantjes vermenigvuldigd worden. En dat is ook wel logisch. Als je een grover rooster op een (2, 1)-rooster tekent, heeft elk stapje naar rechts of naar boven niet lengte 1, maar de zijde van de vierkantjes, dus lengte $\sqrt{5}$. Alle zijden worden dus $\sqrt{5}$ keer zo groot, en de oppervlakte wordt dus 5 keer zo groot.



Figuur 4

Opgave 6. In figuur 4 zie je twee plaatjes van een (1, 0)-rooster waar al een (2, 1)-rooster op getekend is. Teken op het linker (2, 1)-rooster opnieuw een (2, 1)-rooster en teken op het rechter (2, 1)-rooster een (1, 2)-rooster. Wat voor roosters krijg je in deze twee gevallen en wat zijn de oppervlaktes van de vierkanten?

In dit voorbeeld kun je zien dat je vierkanten met bepaalde oppervlakten (in ons geval 25) in verschillende standen op een vierkantrooster kunt tekenen. Dat komt doordat de oppervlakte in zo'n geval op meer dan één manier te schrijven is als een som van twee kwadraten: 25 is te schrijven als $3^2 + 4^2$, maar ook als $0^2 + 5^2$.

PRODUCTEN VAN SOMMEN VAN KWADRATEN Een som van twee kwadraten kan dus getekend worden als de oppervlakte van de vierkanten in een vierkantrooster. Het tekenen van een vierkantrooster op een ander vierkantrooster komt neer op het vermenigvuldigen van twee sommen van twee kwadraten. Het resultaat is weer een nieuw vierkantrooster op het oorspronkelijke rooster, dus de nieuwe oppervlakte is ook weer te schrijven als een som van twee kwadraten.

In de getaltheorie staat dit resultaat bekend als de stelling van Brahmagupta-Fibonacci:

Stelling van Brahmagupta-Fibonacci. Als x en y sommen van twee kwadraten zijn, dan is xy ook een som van twee kwadraten.

We gaan uitzoeken welk rooster precies het resultaat is als je een rooster op een ander rooster tekent. Eerst bekijken we een niet zo ingewikkeld geval. Wat voor rooster krijgen we als we een (c, 0)-rooster op een (a, b)-rooster tekenen?

Eén stap zetten in het (a, b)-rooster betekent a hokjes naar rechts en b omhoog in het oorspronkelijke rooster. Een (c, 0)-rooster betekent: je vindt een nieuw roosterpunt door c stapjes naar rechts te zetten en 0 stapjes omhoog (om te bepalen wat 'rechts' betekent, moet je soms het rooster een beetje draaien). Als we c stappen opzij zetten in het (a, b)-rooster, zetten we dus effectief ac stappen naar rechts en bc stappen omhoog. Het uiteindelijke rooster is dan dus een (ac, bc)-rooster.

En nu het algemene geval: wat wordt het rooster als we een (c, d)-rooster tekenen op een (a, b)-rooster? De c stappen naar rechts op het (a, b)-rooster leveren ac stappen naar rechts en bc stappen omhoog op, zoals we al zagen. Maar nu moeten we ook nog d stappen zetten in de richting van de andere vierkantszijde. De vierkantszijde loodrecht op a hokjes naar rechts en b hokjes omhoog is: b hokjes naar links en a hokjes omhoog. (Teken maar eens een voorbeeld als je dat niet meteen gelooft.) Voor d stappen in die richting is het recept dus: bd hokjes naar links en ad hokjes omhoog. Als we alles bij elkaar optellen, blijkt dus dat we $ac - bd$ hokjes naar rechts moeten en $bc + ad$ hokjes omhoog. Conclusie: Als je een (c, d)-rooster op een (a, b)-rooster tekent, krijg je een ($ac - bd$, $ad + bc$)-rooster.

Opgave 7. In opgave 5 heb je het vermoeden gekregen dat een (a, b)-rooster op een (c, d)-rooster tekenen hetzelfde rooster oplevert als een (c, d)-rooster op een (a, b)-rooster. Laat met behulp van de conclusie zien dat dat inderdaad zo is.

We hadden ook beredeneerd dat de oppervlaktes van de vierkanten in de roosters vermenigvuldigd moeten worden om de oppervlakte van de vierkanten in het uiteindelijke rooster te krijgen. In een (a, b)-rooster hebben de vierkanten oppervlakte $a^2 + b^2$ en in een (c, d)-rooster $c^2 + d^2$. De oppervlakte van de vierkanten in het uiteindelijke rooster is volgens de conclusie $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. Als ons vermoeden klopt, dan moet dit gelijk zijn aan $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

Opgave 8. Laat door haakjes uitwerken zien dat dat inderdaad zo is.

Je had ook al gezien dat sommige getallen, bijvoorbeeld 25, op twee verschillende manieren als som van twee kwadraten geschreven kunnen worden en dat dat overeenkwam met twee verschillende standen van het rooster.

Opgave 9. Wat voor rooster krijg je als je een (d, c)-rooster op een (a, b)-rooster tekent?

Het rooster dat je in opgave 9 hebt beschreven, heeft vierkanten met dezelfde oppervlakte als het $(ac - bd, ad + bc)$-rooster. Ga maar na: de vierkanten in een (d, c)-rooster hebben oppervlakte $d^2 + c^2$, dezelfde oppervlakte als die in een (c, d)-rooster.

Hieruit volgt dat als x en y sommen van twee kwadraten zijn, xy dan soms op twee manieren als som van twee kwadraten geschreven kan worden. Want als $x = a^2 + b^2$ en $y = c^2 + d^2$ (we kiezen a, b, c en d allemaal positief), dan is xy blijkbaar gelijk aan zowel $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ als $(ad - bc)^2 + (ac + bd)^2$, en dat zijn twee schrijfwijzen als som van twee kwadraten!

Tenminste… als deze kwadraten verschillend zijn! Wanneer zijn de kwadraten hetzelfde? In ieder geval als één van de variabelen a, b, c, d gelijk aan nul is. Maar ook als $a = b$ of als $c = d$, zijn de kwadraten hetzelfde. (Dat kun je eenvoudig zelf controleren door deze gevallen in te vullen in de twee sommen van kwadraten.)

Dat zijn meteen de enige gevallen. Dit levert de volgende stelling op (het bewijs staat in het kader onderaan de pagina).

Stelling. Als $x = a^2 + b^2$ en $y = c^2 + d^2$ met $a > b > 0$ en $c > d > 0$, dan is xy op twee verschillende manieren te schrijven als een som van twee kwadraten, namelijk $xy = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2$.

Denk nog even terug aan ons voorbeeld van 25. We hadden dat rooster gemaakt door een (2, 1)-rooster op een (2, 1)-rooster te tekenen en door een (1, 2)-rooster op een (2, 1)-rooster te tekenen. In dit voorbeeld geldt dus $x = 5$, $a = 2$ en $b = 1$ en $y = 5$, $c = 2$ en $d = 1$. Controleer zelf dat de formules hierboven dan inderdaad de twee sommen van kwadraten geven die we al gevonden hadden. ■

Dit artikel is gebaseerd op een deel van het werkboekje 'Sommen van kwadraten' dat onderdeel was van een wiskundekamp van stichting Vierkant voor Wiskunde, geschreven door Hugo de Blank en Johannes Steenstra.

SOM VAN KWADRATEN OP TWEE MANIEREN

We bewijzen de stelling in de rechterkolom hierboven. We gaan aantonen dat $(ac + bd)^2$ verschilt van de beide kwadraten $(ac - bd)^2$ en $(ad + bc)^2$ in de linker uitdrukking. Dit is voldoende om aan te tonen dat de beide schrijfwijzen verschillend zijn.

We berekenen eerst het verschil $(ac + bd)^2 - (ac - bd)^2 = 4abcd$. Omdat a, b, c en d volgens de aanname allemaal groter dan 0 zijn, is $4abcd$ groter dan 0. Daaruit volgt dat $(ac + bd)^2$ in ieder geval niet gelijk is aan $(ac - bd)^2$. Ook kan $(ac + bd)^2$ niet gelijk zijn aan $(ad + bc)^2$, immers: $(ac + bd)^2 - (ad + bc)^2 = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 - a^2d^2 - 2abcd - b^2c^2 = a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2$. Dit kunnen we schrijven als $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2)$. Omdat $a > b$ en $c > d$, zijn beide factoren positief, dus het product is ongelijk aan 0. Het verschil tussen $(ac + bd)^2$ en $(ad + bc)^2$ is dus ongelijk aan 0, dus deze kwadraten zijn ook niet gelijk.