

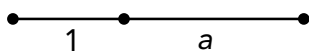
In het februarinummer hebben we een manier geleerd om wortels te construeren. De gulden snede is een verhouding die ook met een passer en een liniaal geconstrueerd kan worden. Dat is niet zo verbazingwekkend, want het gulden-snede-getal is te schrijven met een wortel. In dit artikel bekijken we twee gulden-snede-constructies.

■ door Jeanine Daems

# DE GULDEN SNEDE CONSTRUEREN

Over de gulden snede wordt vaak een heleboel onzin verteld, bijvoorbeeld dat die verhouding in allerlei oude architectuur of kunst te vinden zou zijn, en dat mensen rechthoeken met zijden in die verhouding het allermooist zouden vinden. Maar het is wel een bijzondere verhouding in wiskundig opzicht: een lijnstuk is in twee delen verdeeld volgens de gulden snede als het kleinste deel tot het grootste deel dezelfde verhouding heeft als het grootste deel tot het hele lijnstuk (zie figuur 1).

We kunnen het kleinste deel zonder verlies van algemeenheid 1 noemen (we hebben het tenslotte niet over precieze lengtes, maar over verhoudingen). Dan zegt de definitie hierboven: wanneer  $a$  en 1 de gulden-snede-verhouding hebben, dan geldt  $1 : a = a : (a + 1)$ .



Figuur 1

**Opgave 1.** Gebruik de gelijkheid  $1/a = a/(a + 1)$  en leid daaruit af dat  $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ . (Dit getal wordt vaak  $\phi$  genoemd, de Griekse letter *phi*).

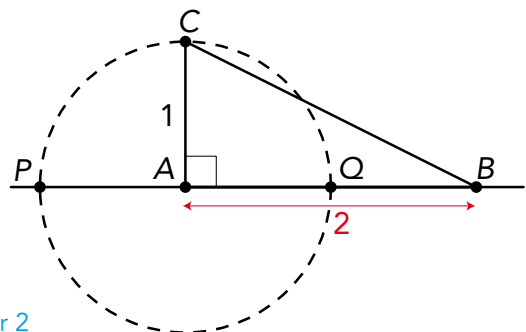
**Opgave 2.** Laat zien dat wanneer we aannemen dat juist het grootste deel van het lijnstuk 1 is, en het kleinste deel  $b$  noemen, het volgende geldt:  $b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ .

De vraag naar de constructie kunnen we nu stellen als: stel dat een lijnstukje van lengte 1 gegeven is, construeer dan met passer en latje een lijnstuk van lengte  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ .

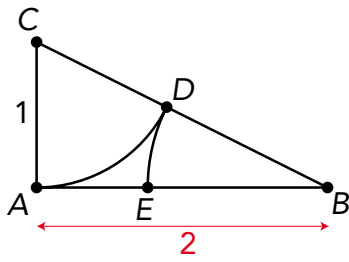
**Opgave 3.** In het artikel ‘Wortels construeren’ (*Pythagoras* 55-4, februari 2016, pagina 5-6) heb je geleerd om wortels te construeren. Gebruik die constructie om  $\sqrt{5}$  te maken en maak daarmee vervolgens  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ .

Dit is één manier om de gulden-snede-verhouding te construeren. Maar dat is niet de enige. De simpelste constructie komt neer op de vraag: gegeven een lijnstuk van lengte 2, kunnen we dat lijnstuk verdelen volgens de gulden-snede-verhouding? Die vraag is dus net een beetje anders: we gaan nu niet een lijnstukje van lengte  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$  construeren, we gaan een lijnstuk van lengte 2 verdelen in twee stukken met verhouding (maar niet lengtes!)  $1 : (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})$ .

Die constructie gaat als volgt (zie figuur 2). Je begint met een lijnstuk  $AB$  van lengte 2. Deel dat doormidden (met een middelloodlijn) en construeer vervolgens door  $A$  een loodlijn op  $AB$  met lengte 1. (Dat kan bijvoorbeeld door een cirkel met middelpunt  $A$  en straal 1 te tekenen, en dan op de twee snijpunten  $P$  en  $Q$  die die cirkel heeft met lijnstuk  $AB$  een middelloodlijn te construeren.) Het uiteinde van dat loodlijntje noemen we  $C$ .



Figuur 2



Figuur 3

**Opgave 4.** Voer deze constructie zelf uit met passer en latje, dus zonder te meten. Begin dus met een willekeurig lijnstuk  $AB$  en noem de lengte van dat lijnstuk 2.

**Opgave 5.** Hoe lang is  $BC$  dan?

De constructie gaat als volgt verder (zie figuur 3). Teken een cirkelboogje met midden  $C$  en straal  $CA$ . Het snijpunt met  $BC$  heet  $D$ . Teken nu een cirkelboogje met midden  $B$  en straal  $BD$ . Het snijpunt met  $AB$  heet  $E$ . De bewering is nu:  $E$  verdeelt het lijnstuk  $AB$  volgens de gulden-snede-verhouding. In de volgende opgave ga je uitzoeken waarom dat klopt.

**Opgave 6.** Hoe lang is  $BD$ ? Hoe lang is  $AE$  dus? Toon aan dat  $AE : EB = 1 : (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})$ .

# OPLOSSINGEN

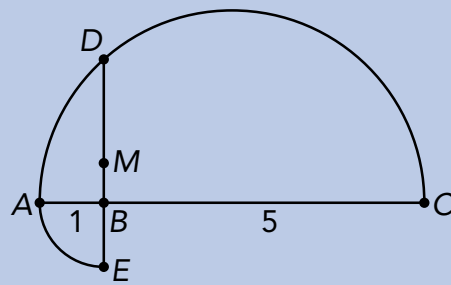
**Opgave 1.** Kruislings vermenigvuldigen geeft  $a^2 = a + 1$ , dus  $a^2 - a - 1 = 0$  en de  $abc$ -formule geeft ons dan twee oplossingen, waarvan  $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$  de enige positieve is.

**Opgave 2.** Dit kan op twee manieren. Analoog aan opgave 1 vinden we  $b/1 = 1/(b + 1)$ , wat leidt tot  $b^2 + b = 1$ . De positieve oplossing van deze vergelijking is  $b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ .

De andere methode gaat als volgt: blijkbaar is de verhouding  $1 : a$  gelijk aan  $b : 1$ , ofwel  $ab = 1$ , en  $1/(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})$  blijkt na wat rekenwerk (zie voor een idee de oplossing van opgave 6 hieronder) inderdaad gelijk te zijn aan  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ .

**Opgave 3.** Voer de constructie uit het vorige nummer uit met lijnstukken van lengte 1 en lengte 5. Dat kwam neer op: verleng een lijnstuk van lengte 1 en pas met de passer daarop nog 5 af, dan krijgen we  $AB$  van lengte 1 en  $BC$  van lengte 5. Bepaal het midden van  $AC$  (bijvoorbeeld door de middelloodlijn te tekenen) en teken met dat midden als middelpunt een cirkel die door  $A$  en  $C$  gaat. Teken vanuit  $B$  een loodlijn omhoog tot hij de cirkel snijdt in  $D$ , dan heeft  $BD$  lengte  $\sqrt{5}$ . Door  $DB$  aan de kant van  $B$  met 1 te verlengen (dat kan eenvoudig door een cirkelboogje met straal  $AB$  om  $B$  te tekenen) krijgen we dus een lijnstuk van lengte  $1 + \sqrt{5}$ . Dit lijnstuk doormidden delen (bijvoorbeeld weer met een middelloodlijn) levert het middelpunt  $M$  op, zodat  $DM = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ .

**Opgave 3 (de constructie).**



**Opgave 5.** De stelling van Pythagoras zegt nu dat  $BC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ .

**Opgave 6.** Omdat  $CD = 1$ , geldt  $BD = \sqrt{5} - 1$ . Dus ook  $BE = \sqrt{5} - 1$ . Dus  $AE = 2 - (\sqrt{5} - 1) = 3 - \sqrt{5}$ . Nu moeten we dus aantonen dat  $(\sqrt{5} - 1) : (3 - \sqrt{5}) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}) : 1$ . Dat gaat bijvoorbeeld door de deling uit te voeren en op een slimme manier met 1 te vermenigvuldigen om de wortels weg te werken uit de noemer:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \\ &= \frac{3\sqrt{5} + 5 - 3 - \sqrt{5}}{9 + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - 5} \\ &= \frac{2\sqrt{5} + 2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}. \end{aligned}$$