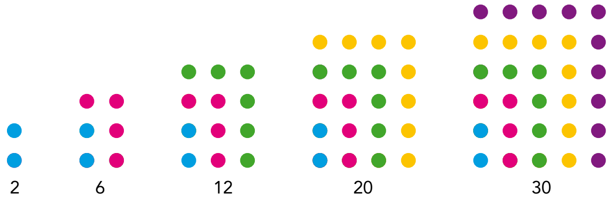
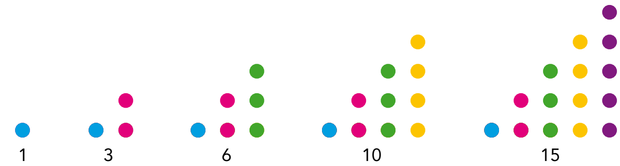
In deze jaargang van *Pythagoras* staan getallenrijen centraal. Deze aflevering gaat over de rij 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... Dit zijn de zogeheten driehoeksgetallen. Ze vormen een interessante rij die met veel andere ideeën in de wiskunde te maken heeft. In dit artikel gaan we die verbanden nader onderzoeken.

■ door Jeanine Daems en Matthijs Coster

DRIEHOEKSGETALLEN



Figuur 1 De eerste vijf rechthoeksgetallen



Figuur 2 De eerste vijf driehoeksgetallen

In figuur 1 zie je een serie rechthoeken, opgebouwd uit bolletjes, met daaronder steeds een getal: zogeheten *rechthoeksgetallen*. Figuur 2 toont de *driehoeksgetallen*, die in dit artikel centraal staan.

Valt je iets op aan de plaatjes in figuur 1? Waarschijnlijk heb je al gauw door dat voor elke rechthoek geldt dat de lengte één bolletje meer bevat dan de breedte. Niet alle getallen die je als een rechthoek kunt leggen zijn dus rechthoeksgetallen. Dat zou ook saai zijn, want élk getal kun je leggen als een rechthoek waarvan de lengte dat getal zelf is en de breedte 1. Voor rechthoeksgetallen doen alleen rechthoeken mee waarvan de lengte precies 1 groter is dan de breedte.

Opgave 1 (bron: *De Wageningse Methode*, 1hv, hoofdstuk 3).

a. Stel een formule op voor het n-de rechthoeksgetal.
b. Wat is het verband tussen het n-de rechthoeksgetal en het n-de driehoeksgetal? Geef ook een formule voor het n-de driehoeksgetal.
c. Hoe kun je nu efficiënt uitrekenen wat $1 + 2 + 3 + \cdots + 300$ is?

Als je telkens twee opeenvolgende driehoeksgetallen bij elkaar optelt, krijg je de volgende blauwgedrukte rij:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ...
som 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...

Opgave 2 (bron: *De Wageningse Methode*, 1hv, hoofdstuk 3).

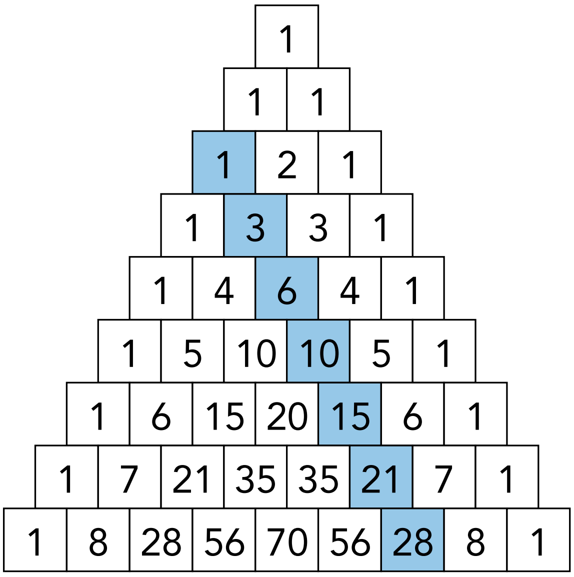
a. Welke getallen herken je hier?
b. Welke eenvoudige figuur kun je maken als je twee opeenvolgende driehoeksgetallen bij elkaar legt? Wat heeft dat met vraag a te maken?
c. Toon aan dat je antwoord altijd klopt door de formules voor het $(n-1)$-ste en n-de driehoeksgetal bij elkaar op te tellen.

De driehoeksgetallen staan in de *Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) onder nummer A000217, de rechthoeksgetallen hebben nummer A002378 en de kwadraten A000290.

DRIEHOEK VAN PASCAL De driehoeksgetallen hebben ook te maken met de driehoek van Pascal, die je in figuur 3 ziet. Je krijgt elk getal steeds door de twee getallen erboven bij elkaar op te tellen. De driehoeksgetallen verschijnen in de schuine rij die blauw gekleurd is (en ook aan de andere kant natuurlijk).

Waarom zijn dat nou precies de driehoeksgetallen? Daarvoor kijken we eerst nog wat beter naar de driehoek van Pascal. Het blijkt dat die getallen te maken hebben met het tellen van mogelijke routes.

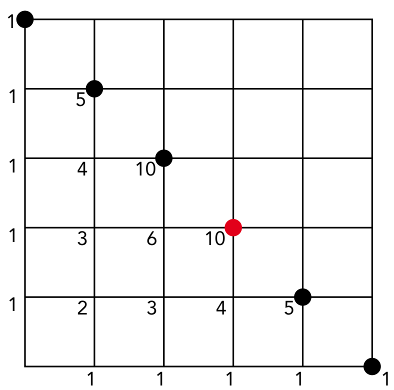
In het rooster in figuur 4 is een punt rood gekleurd. Stel dat je linksonder in het rooster begint met lopen en je mag alleen over de lijntjes naar een volgend roosterpunt, op hoeveel manieren kun je dan via een kortste weg bij het gekleurde punt komen?



Figuur 3 De driehoek van Pascal

Voor elk punt P in het rooster dat niet op de rand ligt geldt: je kunt op twee manieren in dat punt komen, via het punt links ervan en via het punt dat er recht onder ligt. Als je op a manieren in het punt links kunt komen en op b manieren in het punt eronder, kun je uiteraard op $a + b$ manieren in punt P komen. Dus elk getal vind je door het getal links ervan en het getal eronder bij elkaar op te tellen. Omdat je de randpunten slechts op één manier kunt bereiken, krijgen we precies de getallen uit de driehoek van Pascal.

De driehoek van Pascal heeft ook te maken met het aantal manieren waarop je een greep van k dingen kunt doen uit een verzameling van n dingen. Ga maar na: om bij ons gekleurde punt (3, 2) te komen, moeten we vijf stappen zetten. Van die vijf stappen kies je er twee waar je naar boven (b) gaat, de andere drie zet je dan vanzelf naar rechts (r), bijvoorbeeld: bbrrr of rrbrb. Er zijn 10 manieren



Figuur 4 Er zijn 10 kortste routes van linksonder naar het rode punt

SOM VAN STAMBREUKEN MET DRIEHOEKSGETALLEN IN DE NOEMER

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots=2.$$

om in het gekleurde punt te komen, en er zijn dus ook 10 van dergelijke rijtjes. Met andere woorden: als je van vijf dingen (letters) er twee moet kiezen (die een b worden), kan dat op 10 manieren. (Het is duidelijk dat uit vijf letters drie letters kiezen die een r worden hetzelfde oplevert, dat klopt ook met de 10 die bij (2, 3) staat.)

Op deze manier correspondeert elk punt in de driehoek van Pascal met een aantal manieren om een greep van k dingen te nemen uit n dingen. Dat aantal schrijven we als $\binom{n}{k}$ (spreek uit: 'n boven k').

De driehoeksgetallen komen dus blijkbaar overeen met de getallen $\binom{n}{2}$. Waarom is dat zo? Nou, als je twee dingen uit een groep van n dingen kiest, heb je voor de eerste keuze n opties, en voor de volgende keuze $n - 1$. Dat levert dus $n(n - 1)$ keuzes op. Maar omdat je dan alle mogelijke paren dubbel meegeteld hebt (als je eerst x gekozen hebt en daarna y heb je uiteindelijk hetzelfde paar als wanneer je eerst y gekozen hebt en daarna x) moet je dat aantal nog door 2 delen. Dat levert dus $\binom{n}{2}=\frac{1}{2}n(n-1)$ mogelijkheden op. Dat is precies de formule die we al zagen voor de driehoeksgetallen: een half keer een getal keer het volgende getal.

Opgave 3. In een klas van 25 leerlingen geeft iedereen elke andere persoon precies één keer een hand. Hoeveel keer handen schudden is daar in totaal voor nodig?

VOLMAAKTE GETALLEN Een getal waarvan de som van de delers (behalve het getal zelf) gelijk is aan het getal zelf, heet *volmaakt*. Het kleinste volmaakte getal is 6, want de delers zijn 1, 2 en 3, en inderdaad: 1 + 2 + 3 = 6. Het volgende volmaakte getal is 28; zijn delers zijn 1, 2, 4, 7 en 14. De daaropvolgende twee zijn 496 en 8182. Valt je wat op? Al deze volmaakte getallen zijn ook driehoeksgetallen!
Alle bekende volmaakte getallen (zie A000396 in de OEIS) zijn van de vorm $2^{n-1}(2^n - 1)$ (maar niet elk getal van die vorm is volmaakt!). Dat zo'n getal ook een driehoeksgetal is, volgt uit het feit dat $\binom{2^n}{2}=\frac{1}{2}\cdot 2^n(2^n-1)$.

KWADRATEN Wanneer is een driehoeksgetal tegelijkertijd een kwadraat? Dit is het geval voor 1, 36, 1225, 41616, ... (zie A001110). Er zijn oneindig veel kwadratische driehoeksgetallen. De opeenvolgende elementen uit deze rij blijken eenvoudig uit te rekenen door middel van de recursieve formule $a_{n-1}\, a_{n+1} = (a_n - 1)^2$, ofwel $a_{n+1} = (a_n - 1)^2/a_{n-1}$.

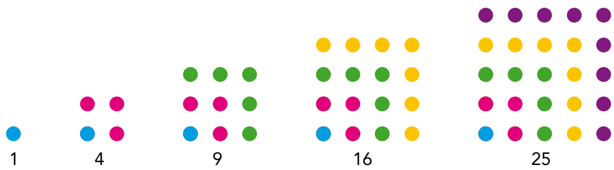
VIERHOEKS-, VIJFHOEKS-, VEELHOEKS-GETALLEN Bestaat er een logische manier om net zoals driehoeksgetallen ook vierhoeks-, vijfhoeks-, zeshoeksgetallen, en verder nog, te maken? Bij de driehoeksgetallen begonnen we met 1 bolletje, en vervolgens kwam er steeds een laagje bij zodat we bij het n-de **drie**hoeksgetal **drie** zijden van lengte n hadden. Datzelfde principe kunnen we gebruiken voor veelhoeken met meer dan drie zijden, zoals je in figuur 5, 6 en 7 kunt zien.

De rij van de vierhoeksgetallen ken je al: dat zijn gewoon de kwadraten. De vijfhoeksgetallen staan in de OEIS onder nummer A000326, de zeshoeksgetallen onder A000384, en ook voor meer zijden zijn de rijen te vinden.

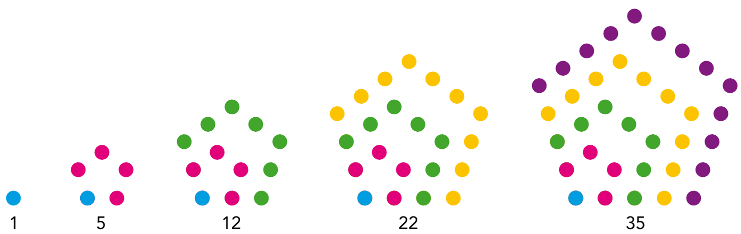
Er zijn getallen die zowel een driehoeks- als een vierhoeksgetal zijn. Die rij getallen begint als volgt: 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881, ... en staat in de OEIS onder nummer A001110. Van dergelijke rijen zijn er meer te vinden in de OEIS, rij A048915 bijvoorbeeld bevat de getallen die zowel een negenhoeks- als een vijfhoeksgetal zijn. Voor de veelhoeksgetallen bestaan mooie formules. Voor het vinden daarvan komt onze kennis van de driehoeksgetallen weer van pas, en het blijkt ook dat alle veelhoeksgetallen weer uit te drukken zijn in driehoeksgetallen.

FORMULES VOOR VEELHOEKSGETALLEN
Eerst een notatie-afspraak: met $V_z(n)$ bedoelen we het n-de z-hoeksgetal. Zo kunnen we het zesde driehoeksgetal aanduiden met $V_3(6)$. We gaat op zoek naar een formule voor $V_z(n)$. Voor $V_3(n)$ kennen we die al: $V_3(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$ Daar zien we echter niet heel duidelijk hoe het aantal zijden een rol speelt. We gaan dus eerst onderzoeken wat er bij $V_4(n)$ en $V_5(n)$ gebeurt, in de hoop een patroon te herkennen.

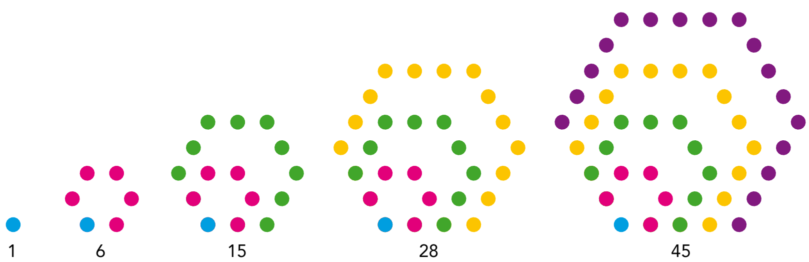
Opgave 4.
a. Hoeveel bolletjes moeten we bij $V_4(n)$ toevoegen om $V_4(n+1)$ te krijgen? Kijk goed naar figuur 5.
b. En hoe zit dat bij de vijfhoeksgetallen (figuur 6)? En bij de zeshoeksgetallen (figuur 7)?



Figuur 5 De eerste vijf vierhoeksgetallen



Figuur 6 De eerste vijf vijfhoeksgetallen



Figuur 7 De eerste vijf zeshoeksgetallen

TETRAËDERGETALLEN Tel de eerste n driehoeksgetallen bij elkaar op. Er geldt dat $1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. Dit zijn de binomiaalcoëfficiënten $\binom{n+2}{3}$ (zie A000292). Deze getallen staan ook bekend als de *tetraëdergetallen*. Kun je zelf bedenken waarom?

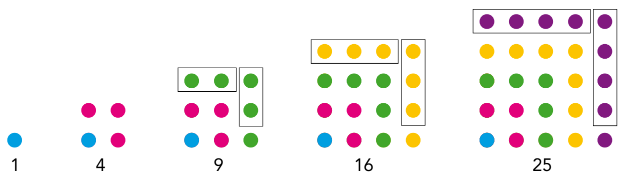
Je kunt het antwoord op opgave 4 op verschillende manieren vinden. De figuren 8, 9 en 10 geven een manier van kijken die je makkelijk kunt uitbreiden naar veelhoeken met meer zijden. Je plakt er steeds een paar stukjes van lengte n bij, en uiteindelijk kom je één bolletje tekort. Het aantal stukjes dat je erbij plakt, is precies twee minder dan het aantal zijden, omdat je aan twee kanten niks erbij plakt. In formulevorm zie je dus dat

$$V_z(n+1) = V_z(n) + (z-2) \cdot n + 1.$$

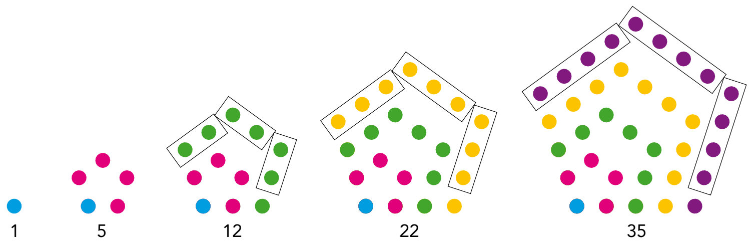
Kunnen we hiervan een directe formule in termen van z en n maken? We kijken eerst maar eens naar $V_4(n)$. Dan zegt onze formule:

$$V_4(n+1) = V_4(n) + 2n + 1.$$

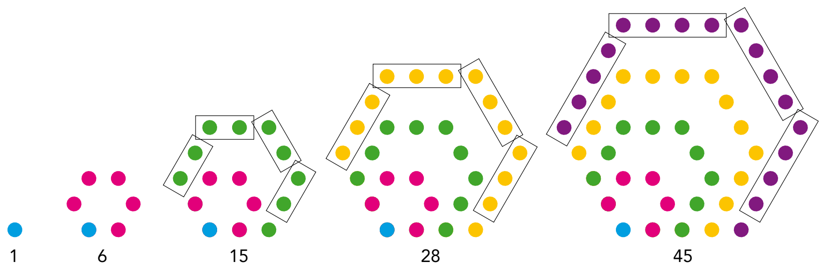
Het eerste getal van elke rij is 1, dus $V_4(1) = 1$.



Figuur 8 Hoeveel bolletjes moet je bij $V_4(n)$ toevoegen om $V_4(n+1)$ te krijgen?



Figuur 9 Hoeveel bolletjes moet je bij $V_5(n)$ toevoegen om $V_5(n+1)$ te krijgen?



Figuur 10 Hoeveel bolletjes moet je bij $V_6(n)$ toevoegen om $V_6(n+1)$ te krijgen?

Daarna tellen we bij elke stap $2n + 1$ erbij op. Dat betekent dus:

$$V_4(n) = 1 + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) + \cdots + (2 \cdot (n-1) + 1).$$

(De laatste term heeft als aantal bolletjes dat er per zijde bij komt $n - 1$, omdat de vorige figuur zijdes van lengte $n - 1$ had.) Die termen kunnen we op de volgende manier herordenen:

$$V_4(n) = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)) + n \cdot 1.$$

En nu komen de driehoeksgetallen weer van pas: we weten dat $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$ gelijk is aan het $(n-1)$-ste driehoeksgetal, dus $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)n$. Dus

$$V_4(n) = 2 \cdot \tfrac{1}{2}(n-1)n + n = (n-1)n + n.$$

Of, als we liever een uitdrukking in termen van de driehoeksgetallen willen:

$$V_4(n) = 2 \cdot V_3(n-1) + n.$$

DERDEMACHTEN Tel de eerste n derdemachten bij elkaar op. Er geldt dat $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (\frac{1}{2}\, n(n + 1))^2$. Hé, hier verschijnen de kwadraten van de driehoeksgetallen (zie A000537)!

Opgave 5. Probeer op dezelfde manier $V_5(n)$ en $V_6(n)$ uit te drukken in termen van $V_3(n - 1)$ en n.

Waarschijnlijk zie je nu wel in dat de algemene formule is:

$$V_z(n) = (z - 2) \cdot V_3(n - 1) + n.$$

Opgave 6. Het is ook mogelijk om $V_z(n)$ alleen in termen van driehoeksgetallen uit te drukken, dus zonder nog losse termen in n erbij: $V_z(n) = (z - 3) \cdot V_3(n - 1) + V_3(n)$. Toon aan dat deze formule ook klopt.

Omdat we voor $V_3(n - 1)$ een mooie formule hebben, kunnen we de algemene formule ook omschrijven naar een formule in termen van alleen n en z:

$$\begin{aligned} V_z(n) &= (z - 2) \cdot V_3(n - 1) + n \\ &= (z - 2) \cdot \tfrac{1}{2}\,(n - 1)n + n \\ &= \tfrac{1}{2}\, n(z - 2)(n - 1) + \tfrac{1}{2}\, n \cdot 2 \\ &= \tfrac{1}{2}\, n(zn - 2n - z + 2 + 2) \\ &= \tfrac{1}{2}\, n((z - 2)n + 4 - z). \end{aligned}$$

En dat leidt tot het volgende mooie rijtje:

$$\begin{aligned} V_3(n) &= \tfrac{1}{2}\, n(n + 1), \\ V_4(n) &= \tfrac{1}{2}\, n(2n + 0)\ [= n^2], \\ V_5(n) &= \tfrac{1}{2}\, n(3n - 1), \\ V_6(n) &= \tfrac{1}{2}\, n(4n - 2), \\ V_7(n) &= \tfrac{1}{2}\, n(5n - 3), \end{aligned}$$

enzovoorts.

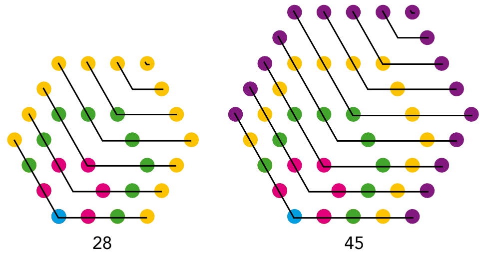
DEELRIJEN De rij zeshoeksgetallen 1, 6, 15, 28, 45, ... lijkt alleen maar getallen te bevatten die ook in de rij driehoeksgetallen 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ... staan. Zo te zien is de rij zeshoeksgetallen een deelrij van de driehoeksgetallen, waarbij steeds één getal wordt overgeslagen. Met behulp van onze formules kunnen we dat nu inderdaad laten zien!

PRIJSVRAAG: BEDENK ZELF EEN RIJ
Bedenk zelf een getallenrij die nog niet voorkomt in de OEIS. Uiteraard geldt: hoe origineler, hoe beter. Er wordt 200 euro aan prijzengeld verdeeld onder de inzenders met interessante getallenrijen. Maar de hoofdprijs is eeuwige roem: vermelding van je rij in de OEIS! Stuur je rij naar **prijsvraag@pyth.eu**. Vermeld je naam, adres, leeftijd, school en klas. Je inzending moet uiterlijk op 15 april 2016 bij ons binnen zijn. Wie voor 1 januari een getallenrij instuurt waarin het getal 2016 voorkomt, dingt mee naar een extra prijs.

Opgave 7. Probeer zelf af te leiden dat $V_6(n) = V_3(2n - 1)$.

Als je goed kijkt, kun je ook in de plaatjes van de zeshoeksgetallen de driehoeksgetallen inderdaad terugvinden als som van het aantal bolletjes op bepaalde lijnen (zie figuur 11).

Opgave 8.
a. Het getal 2016 is een driehoeksgetal! Het hoeveelste driehoeksgetal is dat?
b. Is 2016 misschien ook een zeshoeksgetal? Of nog een ander veelhoeksgetal? ■



Figuur 11 De driehoeksgetallen zijn terug te vinden in de plaatjes van de zeshoeksgetallen.