Evariste Galois is waarschijnlijk de jongst gestorven bekende wiskundige. Hij werd geboren in 1811 en stierf op twintigjarige leeftijd in een duel. Tijdens zijn korte leven heeft hij ideeen ontwikkeld die pas decennia later door anderen begrepen werden en die daarna van grote invloed zijn geweest, vooral in de algebra.

■ door Jeanine Daems

EVARISTE GALOIS (1811-1832):

REVOLUTIONAIR (EN) WISKUNDIGE

Op 25 oktober 1811 werd Evariste Galois geboren in het dorpje Bourg-La-Reine, vlakbij Parijs. Zijn ouders waren goed opgeleid en hadden veel verstand van filosofie, klassieke literatuur en religie. Vader Nicholas Gabriel Galois was een liberaal en een tegenstander van de Franse monarchie.

Het leven van Galois is sterk beïnvloed door de politieke situatie in het Frankrijk van zijn tijd. De Franse Revolutie brak uit in 1789, toen de burgers van Parijs in opstand kwamen tegen koning Lodewijk XVI en de macht van de adel en de geestelijkheid. Lodewijk XVI werd afgezet en onthoofd. Vanaf 1800 was Napoleon aan de macht, en hij was nog volop bezig om te proberen de rest van Europa te veroveren toen Galois werd geboren.

Voor Napoleon was zijn mislukte veldtocht tegen Rusland, waarbij zijn leger enorme verliezen leed, het begin van het einde. Uiteindelijk werd Napoleon in 1815 in de Slag bij Waterloo verslagen door de Engelsen en de Pruisen. Napoleon droeg de troon over aan zijn zoon, Napoleon II, maar al snel kwam Lodewijk XVIII aan de macht.

Galois groeide dus op in een erg onrustige periode. Galois' vader was politiek betrokken: toen Evariste vier jaar oud was, werd zijn vader gekozen tot burgemeester van Bourg-La-Reine. Tot zijn twaalfde kreeg Evariste thuis onderwijs van zijn moeder. Ze leerde hem Grieks, Latijn en theologie, waarbij ze haar eigen kritische houding overdroeg op haar zoon. Toen hij twaalf was, ging hij voor het eerst naar school, naar het Lycée Louis-le-Grand. Ook op school was de situatie onstabiel: in zijn eerste semester daar werd er een leerlingenopstand gepland. Het gerucht ging dat de school weer onder invloed van de kerk zou komen, en de kerk werd sterk in verband gebracht met de monarchie. De leerlingen waren vooral republikeinen, dus tegen de monarchie. De plannen voor de opstand werden ontdekt, en de verantwoordelijke leerlingen werden van school gestuurd. Galois was nog te jong om mee te doen.

WISKUNDE In februari 1927 kreeg Galois voor het eerst wiskunde. Hij werd zo enthousiast dat hij zijn andere schoolvakken liet sloffen. Een docent schreef:

Deze leerling werkt alleen op de hoogste niveaus van de wiskunde. De jongen is waanzinnig bezeten van wiskunde. Mij dunkt dat het voor hem het beste zou zijn als zijn ouders hem zouden toestaan zich alleen hierop toe te leggen. Voor de rest verknoeit hij hier zijn tijd, doet niets dan zijn docenten kwellen en haalt zich alleen maar straffen op de hals.

In 1828 deed Galois toelatingsexamen voor de Ecole Polytechnique, de beste universiteit van Parijs, waar veel republikeinse studenten op zaten. Ondanks zijn uitzonderlijke intelligentie zakte hij, waarschijnlijk door zijn houding (Galois schijnt een nogal opvliegend karakter gehad te hebben) en doordat hij te grote stappen maakte in zijn redeneringen. Terug op school ging hij verder met wiskunde. Hij kreeg les van Louis-Paul-Emile Richard, die zelf in zijn vrije tijd wiskundecolleges volgde aan de Sorbonne en het wiskundig onderzoek van die tijd bijhield. Galois begon de boeken van de beste wiskundigen te bestuderen, zoals die van Legendre en Langrange. In 1829 al publiceerde hij zijn eerste artikel, over kettingbreuken, in de *Annales de mathématiques*. Ook stuurde hij twee artikelen over het oplossen van vergelijkingen naar de Academie van Wetenschappen. De bekende wiskundige Cauchy moest ze beoordelen.

Op 2 juli 1829 gebeurde er iets vreselijks: Galois' vader pleegde zelfmoord. De aanleiding was de komst van een nieuwe jezuïitische priester in Bourg-La-Reine, die zich stoorde aan de republikeinse ideeën van burgemeester Galois. Hij begon een lastercampagne tegen de burgemeester. Galois schreef altijd al geestige gedichtjes, en de priester maakte daar gebruik van door een aantal beledigende gedichtjes te publiceren onder zijn naam. Dat veroorzaakte een rel, burgemeester Galois kon de schande niet aan en sloeg de hand aan zichzelf.

Dat jaar zakte Galois weer voor het toelatingsexamen van de Ecole Polytechnique. Hij besloot naar de Ecole Normale Supérieure te gaan. Daarvoor moest hij eerst een soort eindexamen halen, wat hem lukte. Maar de examinator voor literatuur schreef:

Dit is de enige student die zwak geantwoord heeft, hij weet absoluut niets. Ik heb gehoord dat deze student buitengewone capaciteiten heeft voor wiskunde. Dat verbaast me zeer, want na zijn examen geloofde ik dat hij maar weinig intelligentie bezat.

Galois stuurde nieuw werk over vergelijkingen naar Cauchy, maar hij ontdekte al snel dat een deel van zijn werk hetzelfde was als een artikel van de Noor Niels Henrik Abel, die inmiddels overleden was. Op advies van Cauchy, die erg onder de indruk was van zijn resultaten, combineerde Galois zijn werk tot één nieuw artikel met al zijn ideeën erin. Hij wilde daarmee meedoen aan een wiskundige prijsvraag van de Academie van Wetenschappen, de *Grand Prix* voor de wiskunde. Hij stuurde het artikel naar Joseph Fourier, de secretaris van de Academie, die alle inzendingen moest doorsturen. Fourier overleed een tijdje voor de beoordelingen, en bij de uitslag bleek dat Galois niet alleen niet had gewonnen, maar zelfs niet was ingeschreven! Zijn ingestuurde artikel is nooit meer teruggevonden. Galois geloofde dat zijn artikel expres was zoekgemaakt en hij vermoedde dat de Academie deel was van een samenzwering om hem uit te sluiten van de wiskundige gemeenschap.

MEER POLITIEKE ONRUST In juli 1930 brak er weer een revolutie uit in Parijs. Karel X wilde zijn macht niet inperken en trad af. Er waren rellen in Parijs en de directeur van de Ecole Normale, Guigniault, sloot zijn studenten op in de school om ze ervan te weerhouden mee te vechten. Galois was daar erg boos over, maar het lukte hem niet om te ontsnappen. De republikeinen verloren. Guigniault schreef in de krant aanvallende artikelen over zijn studenten. Toen Galois daar een antwoord op schreef, werd hij van de universiteit gestuurd. Zo kwam er een einde aan zijn officiële wiskundestudie. Hij begon les te geven in zijn eigen ontdekkingen, maar er kwamen nauwelijks studenten, en hij stopte tijdelijk met wiskunde.

Galois werd lid van de artillerie van de Nationale Garde, een republikeins deel van de burgerwacht. Lodewijk-Filips, de nieuwe koning, schafte de Nationale Garde snel daarna af uit angst voor meer rellen. Galois ging weer aan de slag met wiskunde. Maar in mei 1931 kwam een aantal leden van de Nationale Garde vrij uit de gevangenis. Er was een diner om dat te vieren, en tijdens een toost uitte Galois bedreigingen aan de koning, terwijl hij een dolk in zijn hand had. Hij werd gearresteerd, maar werd vrijgesproken: een slimme advocaat en zijn vrienden konden de jury ervan overtuigen dat door het lawaai niemand goed had kunnen horen wat hij precies zei.

Op 14 juli 1831, de dag waarop het begin van de Franse Revolutie werd gevierd, provoceerde Galois de autoriteiten door het uniform van de verboden Nationale Garde aan te trekken. Hij werd opnieuw gearresteerd. Toen hij in de gevangenis zat, kreeg hij van Poisson een afwijzing van een nieuwe versie van zijn artikel over vergelijkingen. Poisson schreef: *Zijn argument is niet voldoende duidelijk en niet voldoende ontwikkeld om ons in staat te stellen de wiskundige strengheid te controleren.* Hij moedigde Galois wel aan om zijn artikel wat verder uit te werken.

Er gebeurde van alles in de gevangenis. Galois, die nooit alcohol had gedronken, werd voor het eerst dronken. Een scherpschutter schoot vanuit een dakgoot een kogel de gevangenis in. De man in de cel naast die van Galois raakte gewond, en Galois was ervan overtuigd dat de kogel voor hem bedoeld was. Hij raakte in een depressie en probeerde zelfmoord te plegen met een dolk, maar zijn medegevangenen voorkwamen dat. In maart 1832 brak er een cholera-epidemie uit in Parijs. De gevangenen

DE WISKUNDE VAN GALOIS

Van een eerstegraadsvergelijking, dat is een vergelijking van de vorm $ax + b = 0$, is de oplossing gauw gevonden: $x = -b/a$. Hetzelfde geldt voor een tweedegraadsvergelijking: met de *abc*-formule vind je de oplossingen van $ax^2 + bx + c = 0$: $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$. Je verwacht misschien dat er voor vergelijkingen met alle hogere machten van x ook dergelijke formules bestaan. Voor derde- en vierdegraadsvergelijkingen bestaan die formules inderdaad. Men heeft lang gezocht naar een formule voor oplossingen van een vijfdegraadsvergelijking. Evariste Galois ontdekte een algemene theorie waaruit onder meer volgt dat zo'n formule niet bestaat.

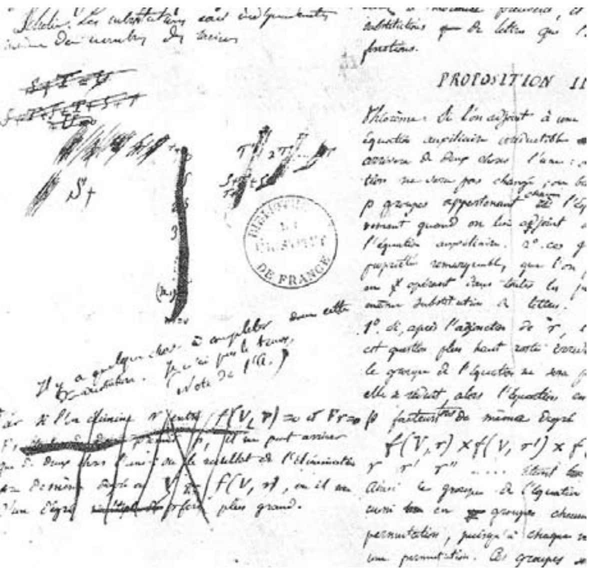
Chevalier en Galois' broer bewerkten na diens tragische dood de wiskundige manuscripten van Galois om ze een beetje begrijpelijker te maken en stuurden ze naar beroemde wiskundigen als Gauss en Jacobi. De eerste jaren na zijn dood werd zijn werk helemaal niet erkend, totdat Joseph Liouville ze onder ogen kreeg. Hij besteedde maanden aan het begrijpen en het opschrijven van Galois' ideeën en publiceerde ze in 1846 in zijn tijdschrift *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. In deze artikelen stond in grote lijnen de theorie die nu bekend is als *Galoistheorie*.

POLYNOOMVERGELIJKINGEN Galois hield zich bezig met het oplossen van bepaalde vergelijkingen: *polynoomvergelijkingen*. Een polynoom is een uitdrukking die bestaat uit getallen en machten van een variabele x. Bijvoorbeeld $x^2 + 2x + 1$ is een polynoom, $x - 85$ ook, net zoals $15x^{37} + 26x^{36} - 3x^2 + 1$ en $3x^3 - \pi x + 2\frac{1}{2}$ en 37. De getallen die vóór de machten van x staan noemen we *coëfficiënten*.

Een polynoomvergelijking is een vergelijking die bestaat uit polynomen en een =-teken, bijvoorbeeld $x^2 + 2x + 1 = 0$, of $x^2 + 2x + 1 = x$, of $x^3 - 5 = x^4 + x^3 - 2$. Als je twee polynomen van elkaar aftrekt, krijg je natuurlijk weer een polynoom. Daarom kun je elke polynoomvergelijking herschrijven zodat er een 0 aan de rechterkant van het =-teken staat. De polynoomvergelijking $x^2 - 2x + 1 = x$ wordt dan $x^2 - 3x + 1 = 0$, en deze twee vergelijkingen hebben natuurlijk precies dezelfde oplossingen.

Een polynoom heeft een *graad*: de graad van een polynoom is de hoogste macht van x die voorkomt. De graad van $x^2 + 2x + 1$ is dus 2, de graad van x^{85} is 85, de graad van $x - \pi$ is 1.

Een n-degraadsvergelijking is een polynoomvergelijking waarin de hoogste macht van x die voorkomt n is. Een tweedegraadsvergelijking heeft dus de vorm $ax^2 + bx + c = 0$, waarbij a, b en c getallen



De brief die Galois vlak voor zijn dood schreef. Links onder het bibliotheekstempel zijn noodkreet: 'Je n'ai pas le temps.' ('Ik heb geen tijd.)

werden verplaatst en op de een of andere manier ontmoette Galois een vrouw: Stéphanie-Félicie Poterine du Motel. Hij werd verliefd op haar en toen hij vrij kwam schreven ze brieven, waarin Stéphanie afstand probeerde te nemen van de affaire.

DUEL In mei 1832 daagde Pescheux d'Herbinville, een goede schutter, Galois uit voor een duel. De reden is niet helemaal duidelijk, maar het zou best kunnen dat het met Stéphanie te maken had. Galois kende de reputatie van zijn tegenstander en hij was ervan overtuigd dat hij het niet zou overleven. In de nacht voor het duel schreef hij afscheidsbrieven aan zijn vrienden. Ook stuurde hij zijn wiskundige ontdekkingen aan Auguste Chevalier, een goede vriend, met het verzoek ze in het geval van zijn overlijden door te sturen aan de grootste wiskundigen van Europa. In de manuscripten is op sommige plaatsen de naam Stéphanie te lezen, en uitroepen als: 'Dit

voorstellen. Op school leer je de *abc*-formule: de oplossingen van een dergelijke vergelijking zijn gelijk aan $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Je ziet: alle oplossingen van een tweedegraadsvergelijking zijn (als ze bestaan) uit te drukken in de coëfficiënten a, b en c door gebruik te maken van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en worteltrekken. De *abc*-formule was al in de tijd van de Babyloniërs bekend, zij het in een vorm die wij maar heel moeilijk zouden herkennen.

De vraag die een wiskundige zich vervolgens gaat stellen, is: is er een soortgelijke '*abc*-formule' voor hogeregraadsvergelijkingen? Ofwel: is het voor polynoomvergelijkingen van graad n met $n \geq 3$ mogelijk om de oplossingen van een n-de graadsvergelijking uit te drukken in de coëfficiënten door alleen gebruik te maken van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en wortels trekken? Onder 'wortels' verstaan we hier de gewone kwadraatwortels, maar ook derde- en hogeremachtswortels.

Voor derde- en vierdegraadsvergelijkingen is het antwoord ja. De formules die daar ontstaan zien er veel ingewikkelder uit dan de *abc*-formule, maar ze bestaan wel. De formules werden allebei gevonden in Italië, in 1545 werden ze gepubliceerd door Cardano. Maar eigenlijk is de formule voor graad 3 gevonden door Tartaglia en die voor de vierdegraadsvergelijking door Ferrari.

GRAAD 5 EN HOGER Het duurde nog eeuwen voor er een antwoord voor de vijfdegraadsvergelijking kwam. Vanaf 1770 bekeek Lagrange het probleem op een nieuwe manier. Hij legde een link tussen de oplossingen van een polynoomvergelijking en een ander wiskundig concept: *permutaties*. Een permutatie is in feite het omwisselen van een aantal dingen. En het blijkt handig te zijn voor ons probleem om voor die dingen oplossingen van vergelijkingen te nemen.

Een derdegraadsvergelijking heeft maximaal drie oplossingen. Er zijn zes permutaties van drie oplossingen: als we de oplossingen even x_1, x_2 en x_3 noemen, kunnen we ze omwisselen tot x_1, x_3, x_2 of x_2, x_1, x_3 of x_2, x_3, x_1 of x_3, x_1, x_2 of x_3, x_2, x_1. We tellen de 'flauwe' permutatie x_1, x_2, x_3 ook mee. Lagrange bekeek bepaalde uitdrukkingen waarin de drie oplossingen voorkwamen, en hij ontdekte dat het omwisselen van de oplossingen vaak helemaal niets uitmaakte voor de uitkomst! Dat leidde tot belangrijke inzichten. Ruffini ging op deze voet verder en hij beweerde in 1799 dat een '*abcde*-formule' voor de vijfdegraadsvergelijking helemaal niet bestaat. Zijn bewijs klopte echter niet helemaal. In 1824 publiceerde de Noorse wiskundige Abel wel een echt bewijs.

Galois was ook met deze vragen bezig. Hij was de eerste die begreep dat het bestaan van een dergelijke formule voor de oplossingen van een vergelijking samenhangt met de structuur van een bepaalde *permutatiegroep*. Een groep is een abstract wiskundig concept, dat in de tijd van Galois nog niet helemaal ontwikkeld was. Wel werkten wiskundigen al met een speciaal geval: de permutatiegroepen. Galois had een erg goed inmoet nog verder worden uitgewerkt. Maar ik heb geen tijd!'

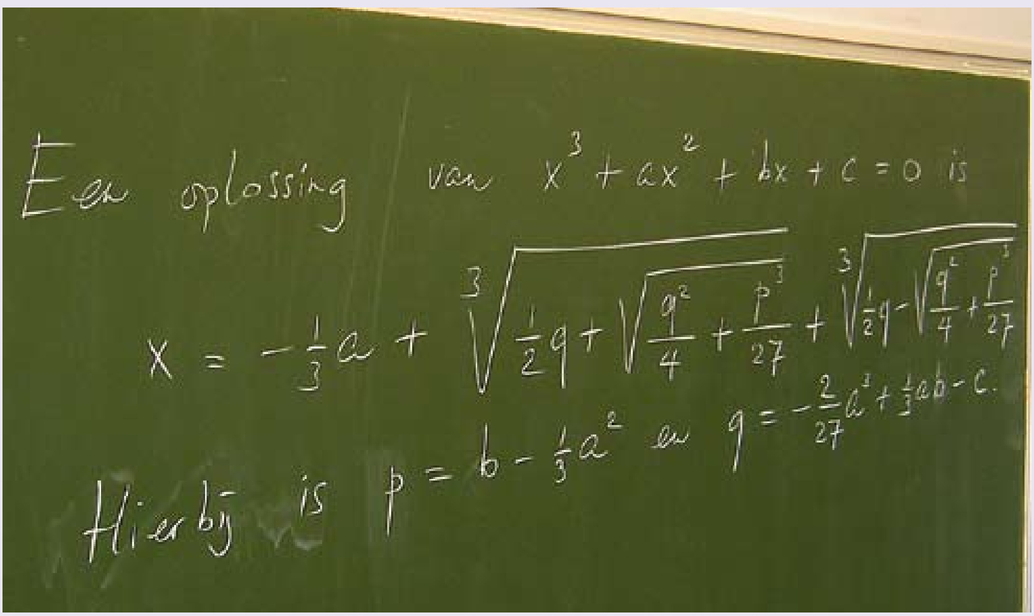
De volgende ochtend stonden Galois en D'Herbinville tegenover elkaar en ze schoten. D'Herbinville was niet geraakt, maar Galois was in zijn buik geschoten. Hij lag op de grond en leefde nog, maar er was geen arts in de buurt en pas later op de dag werd hij naar het ziekenhuis gebracht. Daar overleed hij de volgende dag, op 31 mei 1832.

Galois' begrafenis leidde tot rellen. Een aantal van zijn republikeinse vrienden waren voor de zekerheid al opgepakt, maar de bezoekers van zijn begrafenis raakten er steeds maar van overtuigd dat Galois' dood veroorzaakt was door een politiek complot, en dat Stéphanie hem had verleid om een duel uit te lokken. ■

GEBRUIKTE LITERATUUR

E.T. Bell, *Men of mathematics 2*, Penguin Books, 1965 (eerste druk 1937)
Simon Singh, *Het laatste raadsel van Fermat*, De Arbeiderspers, 1997
Galois biography, op http://www-groups.dcs.stand.ac.uk/~history/Biographies/Galois.html

zicht in de structuur van deze groepen in het geval van zijn probleem. Hij ontwikkelde een methode waarmee we kunnen beslissen voor welke n-degraadsvergelijkingen we een oplossing uitgedrukt in de coëfficiënten (gebruikmakend van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en worteltrekken) kunnen vinden. Zijn ideeën waren zo nieuw en abstract dat het niet verwonderlijk is dat het even duurde voor andere wiskundigen ze precies begrepen. De theorie die hij ontwikkelde heet tegenwoordig *Galoistheorie*, en de groepen die in deze context zo'n belangrijke rol spelen heten nu *Galoisgroepen*. ■



Op de foto zie je een formule om een oplossing van een derdegraadsvergelijking, uitgedrukt in de coëfficiënten, te vinden. De coefficiënt van x^3 is hier 1; als deze coëfficiënt ongelijk is aan 1, kun je de vergelijking eerst herschrijven door elke term door die coëfficiënt te delen. Om de oplossing nog enigszins behapbaar te maken, worden er twee 'hulpvariabelen' p en q, uitgedrukt in de coëfficiënten, ingevoerd.

Een derdegraadsvergelijking heeft over het algemeen drie oplossingen. Met de oplossing die voldoet aan de formule op de foto (noem die oplossing k) en de 'factorstelling' kun je $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ schrijven als $(x - k)(x^2 + \cdots) = 0$. Met de bekende *abc*-formule kun je vervolgens de andere twee oplossingen vinden. De formule om oplossingen van een vierdegraadsvergelijking te vinden, ziet er nóg ingewikkelder uit dan de formule op de foto!