Carl Friedrich Gauss is een van de grootste wiskundigen ooit. Zodra je een studieboek wiskunde openslaat, kom je zijn naam tegen, want in bijna alle vakgebieden in de wiskunde hebben zijn ideeën grote invloed gehad.

■ door Jeanine Daems

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855):

DE PRINS VAN DE WISKUNDE

Hoewel Gauss vaak 'de prins van de wiskunde' genoemd wordt, was zijn afkomst allesbehalve koninklijk. Hij werd geboren in een arme, eenvoudige familie in Brunswijk (Braunschweig, Duitsland). Zijn vader, Gebhard Diederich Gauss, was onder meer tuinman en metselaar, maar hij kon wel lezen en schrijven. Gauss' genie komt vermoedelijk van moeders kant. Zijn moeder heette Dorothea Benz en ze was de tweede vrouw van Gebhard. Zij kon waarschijnlijk wel lezen, maar niet schrijven. Ze had een erg slimme jongere broer, Friederich, die bekend was om zijn mooi geweven damasten. Carl Friedrich Gauss werd geboren op 30 april 1777. Officieel heette hij Johann Friederich Carl Gauss, maar hij signeerde zijn werk altijd met de naam Carl Friedrich Gauss.

WONDERKIND Er bestaan mooie verhalen over zijn jeugd, want Gauss bleek een heus wonderkind te zijn. Op een zaterdag toen de kleine Gauss nog geen drie jaar oud was, zat vader Gebhard de wekelijkse uitbetaling van het salaris van de andere arbeiders te berekenen. De kleine Gauss zat mee te kijken zonder dat zijn vader het in de gaten had, en ontdekte een fout in een lange berekening. Op dat moment had Gauss zichzelf al leren lezen door de klanken van letters te vragen aan de mensen om hem heen.

Kort na zijn zevende verjaardag ging Gauss voor het eerst naar school, waar de eerste twee jaar niet veel opmerkelijks gebeurde. Pas toen Gauss voor het eerst rekenen kreeg kwam zijn talent aan het licht. Gauss' leraar, Büttner, gaf een lange optelsom op aan zijn leerlingen. Gauss had de opgave binnen een paar seconden opgelost. Het was een probleem van het type: wat is $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$? Gauss had meteen door dat 1 + 100 gelijk is aan 2 + 99 en aan 3 + 98, enzovoort. Het antwoord is dus $50 \times 101 = 5050$. Dit is een eenvoudig trucje als je het eenmaal kent, maar om het zelf zo snel te verzinnen is knap. De rest van de klas zat natuurlijk lang te rekenen, maar uiteindelijk was Gauss een van de weinigen met het goede antwoord. Büttner, een strenge man, was onder de indruk en kocht van zijn eigen geld het beste rekenboek dat hij kon vinden. Gauss ging er als een speer doorheen en toen kon zijn leraar hem niets meer leren. Gelukkig had Büttner een assistent, Johann Martin Bartels, een jongeman met een passie voor wiskunde die eigenlijk als taak had de kinderen te helpen met leren schrijven en die hun pennen moest snijden. Bartels was toen 17, en samen met Gauss bestudeerde hij verdere wiskunde. Ze zijn altijd vrienden gebleven. Bartels is later wiskundeprofessor geworden.

In 1788 ging Gauss naar het gymnasium. Daar leerde hij Latijn, maar ook Hoogduits (want van tevoren had hij alleen het lokale dialect gesproken). In 1791 werd Gauss voorgesteld aan hertog Carl Wilhelm Ferdinand van Brunswijk-Wolfenbüttel, die onder de indruk van hem was en hem voortaan een jaarlijkse toelage gaf. Van 1792 tot 1795 zat Gauss op het Collegium Carolinum (later werd dit de Technische Universiteit), waar hij al indrukwekkende wiskunde bedacht.

BREDE BELANGSTELLING In 1795 vertrok Gauss naar de universiteit in Göttingen. Hij was ingeschreven als student wiskunde, maar was ook

DE CONSTRUCTIE VAN DE REGELMATIGE ZEVENTIENHOEK

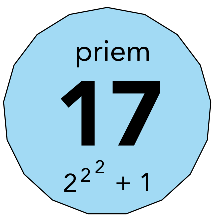
Al in de Griekse oudheid werden constructieproblemen veel bekeken. Een constructieprobleem heeft als opdracht een bepaalde figuur te tekenen. Maar er zijn beperkingen: je mag alleen een passer en een latje (zonder schaalaanduiding, dus geen liniaal!) gebruiken.

Veel figuren zijn op die manier te construeren, rechte hoeken bijvoorbeeld, of een lijn die een gegeven hoek precies in tweeën deelt, of de middelloodlijn op een lijnstuk. Maar voor andere figuren is het moeilijker om te bepalen of ze te construeren zijn of niet. Als het na veel proberen niet lukt, betekent dat natuurlijk niet dat het ook echt niet kán, misschien heb je het nog niet lang genoeg geprobeerd. Maar van sommige objecten is *bewezen* dat het onmogelijk is om ze te construeren. Er bestaat bijvoorbeeld geen methode waarmee je een willekeurige, gegeven hoek in drie gelijke hoeken kan verdelen. Voor bepaalde hoeken is dat wel mogelijk: uit een hoek van 90 graden kun je een hoek van 30 graden construeren. Maar uit een hoek van 30 graden is het niet mogelijk om met alleen een passer en een latje een hoek van 10 graden te construeren.

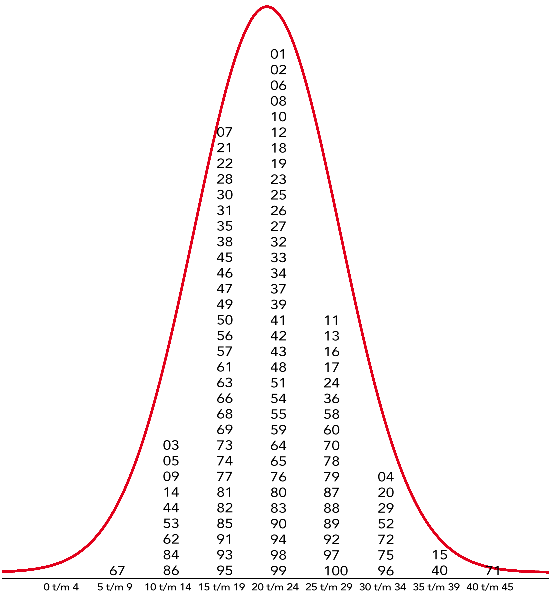
Het constructieprobleem waarmee Gauss zich bezighield, was de vraag: is het mogelijk om met alleen passer en latje een *regelmatige zeventienhoek* te construeren? Gauss loste deze vraag op doordat hij een verband zag tussen de oplossingen van een bepaalde vergelijking en het constructieprobleem van de regelmatige veelhoeken. Dat verband komt voort uit de algebra en getaltheorie. Gauss slaagde erin om een veel algemenere stelling te bewijzen. Hij kon namelijk bepalen voor welke getallen n een regelmatige n-hoek construeerbaar is.

Stelling. Laat n een geheel getal groter dan 2 zijn. Je kunt n nu schrijven als $n = 2^k \cdot m$, waarbij $k \geq 0$ en m oneven is. De regelmatige n-hoek kan geconstrueerd worden als ófwel $m = 1$, ófwel m een priemgetal is van de vorm $2^{2^t} + 1$ (waarbij $t \geq 0$), ófwel m het product is van *verschillende* priemgetallen van die vorm, en anders niet.

De zeventienhoek kan dus geconstrueerd worden, want 17 is een priemgetal en $17 = 2^{2^2} + 1$. De regelmatige 32-hoek is ook te construeren, want $32 = 2^5 \cdot 1$, dus dan is $m = 1$. De regelmatige vijftienhoek kan ook geconstrueerd worden: $15 = 3 \cdot 5$ en 3 en 5 zijn verschillende priemgetallen en ze hebben de goede vorm: $3 = 2^1 + 1$ en $5 = 2^2 + 1$. De regelmatige zevenhoek en negenhoek kunnen bijvoorbeeld niet geconstrueerd worden.



Een regelmatige zeventienhoek kun je construeren, want 17 is een priemgetal en $17 = 2^{2^2} + 1$



De Gauss-kromme duikt vaak op als veel toevalligheden een eindresultaat beïnvloeden; voorbeelden zijn de gewichten van een grote partij sinaasappelen of de IQ's van een groot aantal mensen. Om dit te simuleren, hebben we honderd keer vijf willekeurige decimalen van π opgeteld. Zo'n som is dus minimaal $5 \times 0 = 0$ en maximaal $5 \times 9 = 45$. De decimalen van π zijn in zekere zin toevalsgetallen, dus het resultaat van elke optelling is 'toeval'. Als je slechts tien uitkomsten bekijkt, kan de verdeling heel scheef zijn (kijk maar naar de 70ste tot en met de 79ste uitkomst). Maar alle honderd uitkomsten passen samen wel netjes onder een Gauss-kromme met de top bij het gemiddelde, 22,5.

zeer geïnteresseerd in klassieke talen, en hij was veel meer onder de indruk van zijn professor in de klassieke talen dan van zijn wiskundeprofessor Kästner. Zijn eerste grote ontdekking, de constructie van de regelmatige zeventienhoek en een algemene stelling over de construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken (zie het kader op pagina 23), deed hij in deze jaren. In 1798 keerde hij terug naar Brunswijk. In de periode die toen aanbrak was hij zeer productief. Voor het eerst wijdde hij zich ook systematisch aan de toegepaste wiskunde, in het bijzonder de theoretische en experimentele sterrenkunde. In deze periode maakte Gauss veel vrienden en maakte hij verscheidene reizen.

Zijn werk in deze periode bestreek een breed gebied. In 1799 promoveerde Gauss op een proefschrift over de zogeheten *hoofdstelling van de algebra*. In 1801 verscheen zijn beroemde boek over getaltheorie: *Disquisitiones Arithmeticae*. Maar ook op astronomisch vlak deed Gauss baanbrekend werk. In 1801 was de eerste planetoïde, Ceres, ontdekt, die al snel weer uit het zicht verdwenen was. Gauss gaf een voorspelling voor de baan van Ceres die heel anders was dan de voorspellingen van anderen, maar toen men de planetoïde weer zag bleek hij erg dicht bij de plaats te staan die Gauss had voorspeld. Op dat moment maakte hij niet bekend hoe hij zijn

DE BESTE LIJN DOOR EEN PUNTENWOLK

De eerste vermelding van de *kleinste-kwadratenmethode* in de wiskundige literatuur stamt uit 1806, in een artikel van Legendre. Uit de nalatenschap van Gauss is gebleken dat hij de methode al eerder dan Legendre had gevonden en hem veel gebruikte in zijn berekeningen van de banen van planetoïden. Hij had echter nooit de moeite genomen om hem te publiceren, omdat hij eigenlijk verwachtte dat de methode helemaal niet nieuw was.

De kleinste-kwadratenmethode is een slimme manier om uit een flink aantal onnauwkeurige gegevens 'de beste' conclusie te trekken. Eerst een simpel voorbeeld: stel, je wilt weten hoeveel je weegt, maar je hebt alleen maar een krakkemikkige weegschaal in een badkamer met een hobbelige vloer. Iedere keer dat je op de weegschaal gaat staan, geeft die een ander gewicht aan, waarbij het verschil wel 2 of 3 kilo kan zijn. Het is intuïtief duidelijk wat dan het beste is: weeg jezelf een keer of tien met de weegschaal telkens op andere posities in de badkamer en neem het (rekenkundig) gemiddelde van alle metingen: $a = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})/10$. Waarschijnlijk is a dan wel je ware gewicht tot op een kilo nauwkeurig.

Maar wat doe je, als de grootheid die je meet in de tijd verandert? Stel je voor dat je in een auto zit die probeert met een constante snelheid van 120 km/u te rijden. Als je echt gemiddeld 120 km/u rijdt, haal je nog net je afspraak in een stad 90 kilometer verderop. Helaas kun je door de andere auto's op de weg niet perfect gelijkmatig rijden, en bovendien wijken de snelheidsmeters van personenauto's meestal behoorlijk af.

Meet dan, bijvoorbeeld, zo nauwkeurig mogelijk tien keer met je horloge de tijd wanneer je langs een kilometerpaaltje rijdt. Als je die tijden tegen de afstand uitzet, liggen ze niet perfect op een rechte lijn, maar vormen een langwerpige wolk punten in de grafiek. Als je nu de 'beste' rechte lijn door die puntenwolk trekt en kijkt wanneer die het punt 90 kilometer verderop bereikt, heb je de best mogelijke voorspelling van je aankomsttijd. Maar wat is de beste rechte lijn?

Dit lijkt sterk op het probleem van Gauss toen hij wilde voorspellen waar een bepaalde planetoïde op een zekere dag aan de hemel te zien zou zijn, op basis van oudere, onnauwkeurige waarnemingen (positie aan de hemel op een zeker tijdstip t).

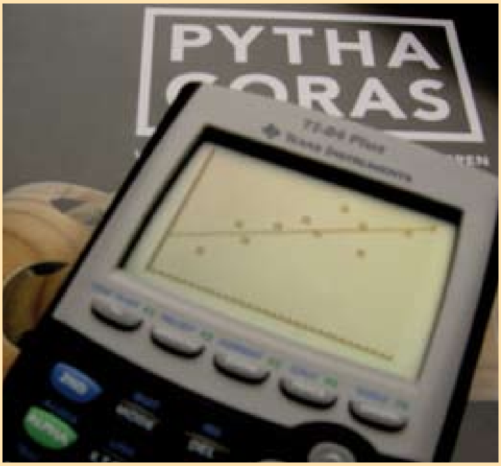
In het geval van de auto nemen we aan dat er geen trend in zijn snelheid zit: hij gaat niet systematisch steeds harder of zachter. Daarom nemen we aan dat het verband tussen de tijd t en de afgelegde afstand y lineair is, dus $y = at + b$. Nu wil je de lijn vinden die het 'beste' past bij de gemeten punten (t_i, y_i). Bepaal voor elk meetpunt de afwijking $(at_i + b) - y_i$, ofwel: je kijkt naar het verschil tussen de y-coördinaat van het gemeten punt (t_i, y_i) en de y-coördinaat die volgens het nog onbekende verband $y = at + b$ bij de t-coördinaat t_i hoort. Die afwijking kwadrateer je (daardoor tellen afwijkingen naar beneden en naar boven gelijkwaardig mee). Al die kwadraten tel je bij elkaar op.

Het principe van de kleinste-kwadratenmethode is nu dat je dit getal zo klein mogelijk maakt. Zoek dus de 'beste' waarden voor a en b door de uitdrukking $((at_1 + b) - y_1)^2 + ((at_2 + b) - y_2)^2 + \cdots + ((at_n + b) - y_n)^2$ te minimaliseren. Hoe je dat precies doet laten we hier buiten beschouwing, maar daar is een wiskundig recept voor.

Om de kleinste-kwadratenmethode toe te passen, hoeft het verband tussen de twee grootheden geen rechte lijn te zijn. Je kunt voor een willekeurig verband tussen y en t uitrekenen wat in elk meetpunt het verschil is, dit kwadrateren, optellen en minimaliseren. Ook voor het rekenkundig gemiddelde geldt trouwens, dat de som van de kwadratische afwijkingen minimaal is.

In het geval van Gauss' planetoïden was het wiskundig verband inderdaad niet lineair, maar het was wel bekend, omdat dit volgt uit de zwaartekrachtswetten van Newton. Daarom kon hij verrassend nauwkeurig voorspellen op welk stukje van de hemel de astronomen hun telescopen moesten richten om op een zekere dag een verre planetoïde weer in het oog te krijgen.

De kleinste-kwadratenmethode is zelfs toepasbaar als het verband tussen de grootheden niet bekend is. Je spreekt dan van *curve fitting*: probeer een aantal standaardformules uit ($y = at + b$; $y = at^2 + bt + c$; $y = ae^t + b$, enzovoort), bepaal telkens de optimale a, b, c, ... en kijk dan welke curve het beste bij de puntenwolk past. Uiteindelijk is die afweging subjectief, dus je kunt hiermee nooit bewijzen dat het verband tussen twee grootheden aan een van die formules voldoet. Toch blijkt curve fitting vaak redelijk nauwkeurige voorspellingen op te leveren.



Het principe van de kleinste kwadraten wordt ook door de grafische rekenmachine gebruikt bij het berekenen van *regressiemodellen*

voorspelling berekend had, maar later bleek dat hij de *kleinste-kwadratenmethode* had bedacht en gebruikt (zie het kader hierboven). Deze goede voorspelling verspreidde Gauss' faam onder astronomen en hij werd bekend in heel Europa.

Op 9 oktober 1805 trouwde Gauss met Johanne Osthof. Zij kregen drie kinderen: Joseph, Minna en Louis, alledrie vernoemd naar astronomen. De laatste bevalling in 1809 bleek te zwaar voor Johanne, en ze stierf, kort daarop gevolgd door de kleine Louis die maar vijf maanden oud werd. Gauss trouwde snel opnieuw, met de beste vriendin van zijn eerste vrouw: Minna Waldeck.

In 1807 vertrok Gauss naar Göttingen, om directeur te worden van de sterrenwacht. Hij had in de voorgaande jaren ook andere aanbiedingen gekregen, maar Gauss koos voor Göttingen omdat hem beloofd was dat daar een nieuwe sterrenwacht zou komen, dat hij een goede, eigen assistent zou krijgen en dat hij losjes aan de universiteit verbonden zou zijn. Gauss moest zich nog lang met de oude sterrenwacht behelpen: de nieuwe Göttingse sterrenwacht was pas in 1816 af. In de jaren daarna installeerden Gauss en zijn assistent Harding de astronomische instrumenten. Gauss' interesse in de astronomie, en later ook in de landmeetkunde, leidde ertoe dat hij geïnteresseerd raakte in methoden om de grootte van meetfouten te bepalen. Zo kwam hij terecht bij de kansrekening en statistiek. Gauss' bijdragen hieraan zijn erg belangrijk geweest voor de ontwikkeling van onze moderne theorieën. In 1809 verscheen zijn eerste publicatie over de kleinste-kwadratenmethode (die al in 1806 door Laplace gepubliceerd was), en in 1816 kwam de beroemde *Gausskromme* (de kromme die hoort bij de normale verdeling) aan de orde. Gauss nam waarschijnlijk zijn eigen metingen van een bepaalde grootheid en hij keek hoe de verschillende gemeten waarden verspreid waren rond het gemiddelde daarvan. De Gausskromme, die hij vond na wat wiskundige aannames gedaan te hebben, bleek deze verdeling goed te beschrijven.

Al die tijd vond Gauss naast zijn werk in de sterrenwacht tijd om aan andere onderwerpen te werken, ook in de zuivere wiskunde. In 1817 stopte hij met zijn theoretische astronomische werk, maar hij bleef wel observaties doen. Vanaf 1818 hield hij zich bezig met weer een heel ander vakgebied: de landmeetkunde. Hij was gevraagd om de staat Hannover te meten, zodat Hannover aangesloten kon worden op de metingen van Denemarken die er al waren. Dat gebeurde door zogenaamde driehoeksmetingen.

LANDMETING Stel dat je de afstand wil weten tussen twee ver van elkaar verwijderde punten A en B (bijvoorbeeld het punt A waar je staat en een boom of toren in de verte op punt B). Kies dan een derde punt C zó dat je de afstand tussen A en C kunt meten (we noemen AC dan wel de *basislijn*). De punten A, B en C vormen natuurlijk een driehoek. Dan zet je instrumenten om hoeken te meten op de punten A en C, en dan meet je de hoeken in de driehoek bij A en C. Dan kun je de derde hoek van de driehoek en de lengtes van de twee andere zijden (in het bijzonder dus de zijde AC, die je wilde weten) uitrekenen. Als je de afstand van twee nog veel verder uit elkaar liggende punten wil meten, kun je hetzelfde doen met een heleboel driehoeken die naast elkaar liggen. Om een land in kaart te brengen, kun je dus het land in driehoekjes verdelen waarvan je de zijden op deze manier gemeten hebt, en dan kun je ook afstanden tussen verder uit elkaar gelegen punten berekenen.

In de achttiende eeuw stond landmeten al erg in de belangstelling, ook omdat dergelijke metingen iets kunnen vertellen over de precieze vorm van de aarde. De aarde is ongeveer een bol, maar niet helemaal, en landmeten zou uitsluitsel kunnen geven over de kromming van de aarde.

Helaas bleken de basislijnen niet zo precies gemeten te zijn, en was het netwerk van driehoeken ook niet zo goed, waardoor de resultaten een beetje tegenvielen. Maar Gauss' werk leverde wel een praktische uitvinding op: de heliotroop. Dat is een instrument dat direct een lichtsignaal in een bepaalde richting kan geven, door zonlicht te reflecteren. Zo kun je snel signalen doorgeven over een tamelijk grote afstand. In de driehoeksmetingen is het bovendien natuurlijk handig om een stralend, vast lichtpunt op enkele kilometers afstand te kunnen zien.

In 1832 kwam natuurkundeprofessor Weber naar Göttingen. Gauss had al eerder aan natuurkunde gewerkt, en samen met Weber ging hij het aardmagnetisme onderzoeken. In de zes jaar dat ze samenwerkten, bereikten ze veel. Zo bouwden ze samen de eerste werkende (natuurlijk nog wat primitieve) telegraaf. In 1837 verliet Weber Göttingen, en vanaf die tijd nam Gauss' activiteit langzaam af. In 1849 gaf hij zijn gouden-jubileumlezing, vijftig jaar na zijn promotie. Vanaf 1850 was zijn werk weer vooral van praktische aard. Langzaam ging zijn gezondheid achteruit en hij stierf in zijn slaap op 23 februari 1855.

PERFECTIONIST Een kenmerk van Gauss was dat hij zijn ideeën heel precies en helemaal perfect uitgewerkt wilde hebben voor hij ze publiceerde. Hij heeft veel van zijn ideeën daardoor niet gepubliceerd, zoals bijvoorbeeld te zien is aan zijn later teruggevonden dagboek. Hij heeft verscheidene keren geclaimd, na het horen over een nieuwe ontdekking in de wiskunde, dat hij dat ook al had bedacht, zie het kader over de kleinste-kwadratenmethode.

Gauss heeft zich met zoveel verschillende problemen en ideeën beziggehouden dat het ondoenlijk is om een goed beeld te geven van zijn verscheidenheid. In de kaders kun je meer lezen over twee van zijn bekende resultaten. Maar je moet daarbij bedenken dat twee voorbeelden nog lang geen compleet beeld kunnen geven van Gauss' invloed op de wiskunde van nu. ■

GEBRUIKTE LITERATUUR

E.T. Bell, *Men of Mathematics*
Tord Hall, *Carl Friedrich Gauss – A Biography*
W.K. Bühler, *Gauss – A Biographical Study*
www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Gauss.html