In dit blad hebben we al vaker geschreven over meetkundige constructies. Bij zo'n constructie zijn de enig toegestane hulpmiddelen – naast gewoon een potlood – een passer en een liniaal zonder schaalverdeling. Met zo'n latje kun je dus wel rechte lijnen trekken, maar je kunt niet meten. In dit artikel bekijken we de constructie van wortels.

■ door Jeanine Daems

WORTELS CONSTRUEREN

Stel dat een lijnstuk van lengte 1 gegeven is. Kun je dan met een passer en een latje een lijnstukje van lengte $\sqrt{2}$ construeren? En hoe zit het met de constructie van $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ of de wortel uit een ander getal (dat geen kwadraat is, uiteraard)?

Het construeren van $\sqrt{2}$ is niet zo ingewikkeld, $\sqrt{2}$ is immers de lengte van de diagonaal van een vierkant met zijde 1. Dus als je van dat gegeven lijnstuk van lengte 1 een vierkant construeert, hoef je alleen de diagonaal nog te tekenen.

Opgave 1. Hoe kun je op een gegeven lijnstuk van lengte 1 een vierkant met zijde 1 construeren met passer en latje?

Het blijkt dat je ook alle andere wortels van de vorm $\sqrt{n}$ kunt construeren, en dat kan voor elke n met dezelfde constructie. Deze constructie komt al voor in *De Elementen* van Euclides (ca. 300 v. Chr.). Hiernaast zie je een plaatje uit het werk *De arithmetische en geometrische fondamenten* van Ludolph van Ceulen uit 1615. Hij construeert de zogenaamde 'middelevenredige', ofwel 'middel proportionael linie'. Dat komt in feite neer op het construeren van wortels, zoals we straks zullen zien.

Je kunt in het schuin gedrukte stukje tekst lezen dat de gezochte middelevenredige betekent dat de verhouding van het eerste gegeven lijnstuk tot het gezochte lijnstuk hetzelfde is als de verhouding van het gezochte lijnstuk tot het tweede gegeven lijnstuk. Met andere woorden: als er lijnstukken AB en BC gegeven zijn met lengtes a en b, dan zoeken we x waarvoor geldt:

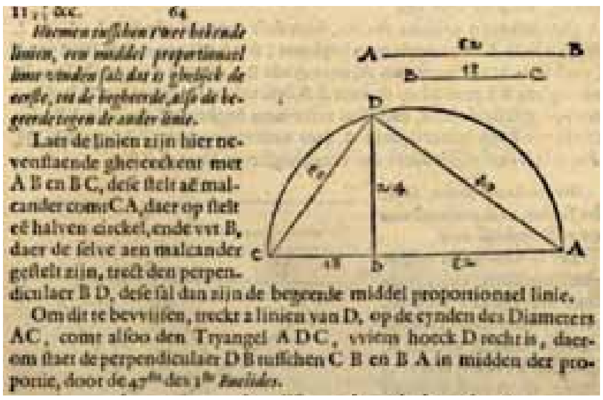
$$a : x = x : b.$$

Opgave 2. Controleer dat het voorbeeld dat Van Ceulen hier geeft, aan die eis voldoet.

Opgave 3. Beschrijf stap voor stap hoe Van Ceulen de middelevenredige construeert vanuit de twee gegeven lijnstukken. Check in elke stap dat het echt een constructie is, dat wil zeggen: dat het met alleen passer en latje kan worden uitgevoerd.

Opgave 4. Voer de constructie zelf uit voor lijnstukken van lengte 3 en lengte 7. Wat is de lengte van de middelevenredige die je gevonden hebt?

De stelling van Thales zegt: als je op een gegeven lijnstuk AC een halve cirkel tekent met dat lijnstuk als diameter en je kiest een willekeurig punt D op de cirkelboog, dan is hoek ADC een rechte hoek. (Deze bekende stelling bewezen we in het artikel 'Thales van Milete' in *Pythagoras* 52-6, juni 2013, te vinden in ons archief op www.pyth.eu.)



Hoemen tusschen twee bekende linien, een middel proportionael linie vinden sal, dat is ghelijck de eerste, tot de begheerde, also de begeerde tegen de ander linie.

Laet de linien zijn hier nevenstaende gheteeckent met A B en B C, dese stelt aē malcander com̄ C A, daer op stelt eē halven circkel, ende vut B, daer de selve aen malcander gestelt zijn, treckt den perpendiculaer B D, dese sal dan zijn de begeerde middel proportionael linie.

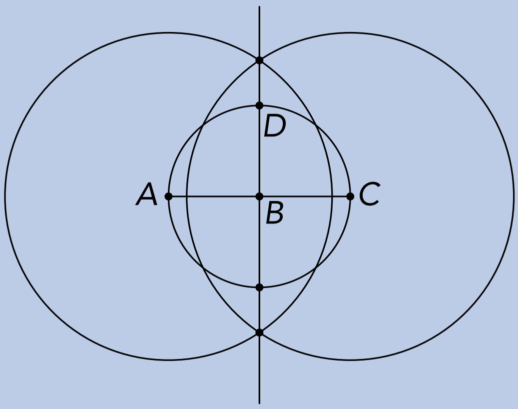
Om dit te bewijsen, treckt 2 linien van D, op de eynden des Diameters AC, comt alsoo den Tryangel ADC, wiens hoeck D recht is, daerom staet de perpendiculaer D B tusschen C B en B A in midden der proportie, door de 47ste des 1ste *Euclides*.

Opgave 5. Gebruik deze stelling en bewijs dat de constructie van Van Ceulen inderdaad de middelevenredige oplevert als je begint met willekeurige lijnstukken van lengte a en b.

Opgave 6. Als een lijnstuk van lengte 1 en een lijnstuk van lengte n gegeven zijn, kun je op deze manier dan een lijnstuk met lengte $\sqrt{n}$ construeren?

OPLOSSINGEN

Opgave 1. Verleng het gegeven lijnstuk AB van lengte 1 tot een lijnstuk AC van lengte 2 en construeer daarop de middelloodlijn. Pas met de passer op de middelloodlijn lengte 1 af (punt D), zoals hieronder te zien is. Herhaal dit nog een keer aan de andere kant om ook het vierde hoekpunt te vinden.



Opgave 2. 18/24 = 24/32.

Opgave 3. Stap 1: leg AB en BC in elkaars verlengde en construeer AC. Dat kan door AB te verlengen en bij B het lijnstuk BC met de passer over te brengen. Stap 2: construeer de cirkel met middellijn AC. Dat kan door eerst het midden van AC te bepalen met de middelloodlijn. Stap 3: construeer de loodlijn op AC door B en snijd deze met de cirkel. Het snijpunt noem je D. (De loodlijn construeren kan door eerst een cirkel met middelpunt B te tekenen, de snijpunten met lijn AC noemen we S en T. Construeer vervolgens de middelloodlijn op ST, die gaat dan vanzelf door B.) Lijnstuk BD is het gezochte lijnstuk.

Opgave 4. $3/x = x/7$, dus $x^2 = 21$, dus $x = \sqrt{21}$.

Opgave 5. Driehoek CBD is gelijkvormig met CDA, en ook driehoek DBA is gelijkvormig met CDA (ze hebben in beide gevallen een rechte hoek en een andere hoek gemeenschappelijk). Daarom zijn CBD en DBA gelijkvormig.
Het gegeven lijnstuk CB noemen we a en AB noemen we b, en het gezochte lijnstuk BD noemen we x. Dan geldt vanwege de gelijkvormigheid $a : x = x : b$.

Opgave 6. In dat geval geldt $1/x = x/n$, ofwel $x^2 = n$, dus $x = \sqrt{n}$. ■